

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 07

Abgabe: 12.02.2021, 11:00 Uhr

Besprechung: 16.02.2021

Aufgabe 1* (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem $2P$ -Zustand mit $m = 0, +1$ oder -1 befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrate in den $1S$ -Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P \rightarrow 1S, \vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}^*|^2,$$

wobei $\vec{k}$ und λ Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich ω aus der Energiedifferenz zwischen dem $2P$ - und $1S$ -Niveau ergibt.

- (i) Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel $d\Omega$ (des Vektors $\vec{k}$), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements $|\vec{d}_{2P,1S}|$ zu bekommen.
- (ii) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement $\vec{d}_{2P,1S}$ und drücken Sie die Lebensdauer τ durch α , m_e , c und $\hbar$ aus.
- (iii) Werten Sie τ numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite http://pdg.lbl.gov/2021/reviews/contents_sports.html.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei identische Teilchen mit (a) Spin $1/2$ und (b) Spin 1 , die sich im Potential eines harmonischen Oszillator befinden. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen.

- (i) Geben Sie die Symmetrieeigenschaften der Eigenvektoren der Operatoren $\vec{S}^2$ und S_z an, wobei $\vec{S}$ der Gesamtspinoperator ist.
Hinweis: Benutzen Sie dazu z.B. die tabellierte Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus <http://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>.
- (ii) Berechnen Sie die Energien und die Wellenfunktionen für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand. Geben Sie jeweils den Entartungsgrad an.

Aufgabe 3

Berechnen Sie für ein wechselwirkungsfreies Elektronengas die Fermi-Energie, d.h. die maximale Energie, die von einem Elektron im Grundzustand des Gases besetzt ist. Gehen Sie dafür folgendermaßen vor:

- (i) Bestimmen Sie die Energieniveaus eines quantenmechanischen Teilchens im 3-dimensionalen Kastenpotential $-\frac{L}{2} \leq x, y, z \leq \frac{L}{2}$. Benutzen Sie dabei ihre Kenntnis der Lösung des 1-dimensionalen Kastenpotentials.
- (ii) Skizzieren Sie die Lage der Zustände in der k_x - k_y -Ebene.

- (iii) Seien nun n Elektronen (d.h. Fermionen) in diesem Potential. Vernachlässigen Sie alle Wechselwirkungen zwischen den Elektronen. Begründen Sie, dass dieses Elektronengas im Grundzustand alle Zustände innerhalb einer Kugel im $\vec{k}$ -Raum besetzt. Berechnen Sie den Radius dieser Kugel. *Hinweis:* Beachten Sie, dass jeder Zustand durch vier Quantenzahlen charakterisiert wird: n_x, n_y, n_z und die Spinquantenzahl m_s .
- (iv) Bestimmen Sie damit die Fermi-Energie des Elektronengases, und berechnen Sie daraus die Zustandsdichte $\rho(E) = \frac{dn}{dE}$.
-