

## Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. A. Özçelik

### Übungsblatt 2

Ausgabe: 29.10.21 – Abgabe: 11.11.21 bis 12:00 Uhr – Besprechung: 12.11.21

Dieses Übungsblatt enthält 10 reguläre Punkte und 2 Bonuspunkte.

#### Aufgabe 1: Elektron mit Spin und Bahndrehimpuls

4+2 Punkte

Wir betrachten ein Elektron mit Bahndrehimpuls  $\ell = 1$  und Spin  $s = \frac{1}{2}$ .

- (a) 1 Punkt Eine Zustandsbasis ist durch die Eigenzustände  $|\ell, m_\ell; s, m_s\rangle = |\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$  gegeben. Wie viel Eigenzustände gibt es in diesem Fall? Wie wirkt der Gesamtdrehimpulsoperator  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  auf diese Zustände? Zeigen Sie, dass diese Zustände keine Eigenzustände der Spin-Bahn-Kopplung  $H_{\text{int}} = \vec{L} \cdot \vec{S}$  sind.
- (b) 1 Punkt Eine neue Basis von Zuständen

$$|j, m; \ell, s\rangle = \sum_{m_\ell, m_s} C_{\ell m_\ell s m_s}^{j m} |\ell, m_\ell; s, m_s\rangle \quad (1)$$

sind Eigenzustände von  $\vec{J}^2$ ,  $J_z$ ,  $\vec{L}^2$  und  $\vec{S}^2$  sowie  $H_{\text{int}}$ . Konstruieren Sie die neue Basis von Zuständen mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren sowie die Bedingung von Orthogonalität der Zustände. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Clebsch-Gordan Koeffizienten  $C_{\ell m_\ell s m_s}^{j m}$  mit Abb. 1.

$1 \times 1/2$	$3/2$						
	$+3/2$	$3/2$	$1/2$				
$+1$	$+1/2$	$1$	$+1/2$	$+1/2$			
	$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$	
	$0$	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$	
			$0$	$-1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/2$
			$-1$	$+1/2$	$1/3$	$-2/3$	$-3/2$
$2 \times 1$	$3$			$-1$	$-1/2$	$1$	
	$+3$	$3$	$2$				

Abbildung 1: Clebsch-Gordan Koeffiziente (ohne Wurzel).

- (c) 1 Bonus Punkt Beweisen Sie die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{m_1, m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j' m'} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = \delta_{j' j} \delta_{m' m}, \quad (2)$$

$$\sum_{j, m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m'_1 j_2 m'_2}^{j m} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (3)$$

und rechnen Sie damit zum Beispiel  $C_{10 \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$  nach.

- (d) 1 Bonus Punkt Beweisen Sie die Rekursionsbeziehungen

$$\mu_+(j, m) C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m+1} = \mu_-(j_1, m_1) C_{j_1 m_1-1 j_2 m_2}^{j m} + \mu_-(j_2, m_2) C_{j_1 m_1 j_2 m_2-1}^{j m}, \quad (4)$$

$$\mu_-(j, m) C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m-1} = \mu_+(j_1, m_1) C_{j_1 m_1+1 j_2 m_2}^{j m} + \mu_+(j_2, m_2) C_{j_1 m_1 j_2 m_2+1}^{j m} \quad (5)$$

und rechnen Sie damit zum Beispiel  $C_{11 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$  nach.

- (e) 1 Punkt Jetzt betrachten wir die zu  $|\ell, m_\ell; s, m_s\rangle$  sowie  $|j, m; \ell, s\rangle$  gehörige Wellenfunktionen. Zeigen Sie, dass

$$\Psi_{\ell m_\ell s m_s}(\vartheta, \varphi) = Y_{\ell m_\ell}(\vartheta, \varphi) \chi_{s m_s} \quad (6)$$

wobei  $Y_{\ell m_\ell}(\vartheta, \varphi)$  die Kugelflächenfunktionen sind, und  $\chi_{s m_s}$  die Spinoren

$$\chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen  $\Psi_{j m \ell s}(\vartheta, \varphi)$  durch

$$\Psi_{\frac{3}{2} m_1 \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m}{3}} Y_{1 m - \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{3}} Y_{1 m + \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Psi_{\frac{1}{2} m_1 \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{m}{3}} Y_{1 m - \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m}{3}} Y_{1 m + \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (9)$$

gegeben sind.

- (f) 1 Punkt Wie sieht die Darstellung der Operatoren  $L_z, S_z$  und  $J_z$  (wirkend auf die Wellenfunktionen) aus? Kontrollieren Sie die Eigenwerte von  $J_z$  wirkend auf  $\Psi_{\frac{3}{2} m_1 \frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi)$ .

## Aufgabe 2: Dzyaloshinski-Moriya Wechselwirkung

**3 Punkte**

In gewissen Festkörpern wird die Wechselwirkung zwischen benachbarten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

$$H = A(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + \vec{B} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2], \quad (1)$$

wobei die Zahl  $A$  und der Vektor  $\vec{B}$  materialabhängige Konstanten sind.

- (a) 1 Punkt Zeigen Sie, dass der zweite Term im Hamilton-Operator nicht mit dem Gesamtspin  $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$  kommutiert. Schliessen Sie daraus, dass

die in der Vorlesung eingeführte Gesamtdrehimpulsbasis

$$|1, \pm 1\rangle = |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \quad (2)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) \quad (3)$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) \quad (4)$$

für die Beschreibung dieses Problems keine geeignete Basis ist.

- (b) 1 Punkt Zeigen Sie, dass die Wirkung des zweiten Terms im Hamilton-Operator auf der Gesamtdrehimpulsbasis gegeben ist durch

$$\vec{B} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2] |1, \pm 1\rangle = 0, \quad (5)$$

$$\vec{B} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2] |1, 0\rangle = 2iB |0, 0\rangle, \quad (6)$$

$$\vec{B} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2] |0, 0\rangle = -2iB |1, 0\rangle. \quad (7)$$

wobei  $B = |\vec{B}|$ .

- (c) 1 Punkt Verwenden Sie die obigen Ergebnisse, um eine Basis aus Eigenzuständen des Hamilton-Operators zu bestimmen. Geben Sie auch die dazugehörigen Energieeigenwerte an.

### Aufgabe 3: Vektormodell

3 Punkte

Unter einem Vektoroperator versteht man ein Operator  $\vec{V}$  mit der folgenden Eigenschaft:

$$[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk} V_k. \quad (1)$$

Dabei ist  $\vec{J}$  der Drehimpulsoperator, welcher selbst ein Vektoroperator ist. Das in der Vorlesung eingeführte Vektormodell besagt, dass alle Matrixelemente von Vektoroperatoren bezüglich einer Basis  $|\alpha jm\rangle$  von Eigenzuständen des Drehimpulses proportional zum Matrixelement des Drehimpulsoperators sind,

$$\langle \alpha jm' | \vec{V} | \alpha jm \rangle \propto \langle \alpha jm' | \vec{J} | \alpha jm \rangle. \quad (2)$$

Das Symbol  $\alpha$  bezeichnet dabei allfällige zusätzliche Quantenzahlen (Energie,...) mit denen die Basis vollständig festgelegt ist. Im Folgenden wird das Vektormodell auf zwei unterschiedliche Arten bewiesen.

- (a) 1 Punkt Wie in der Vorlesung besprochen, lässt sich mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems die folgende Identität aufschreiben:

$$\langle \alpha jm' | \vec{V} | \alpha jm \rangle = \frac{\langle \alpha j | V | \alpha j \rangle}{\langle \alpha j | J | \alpha j \rangle} \langle \alpha jm' | \vec{J} | \alpha jm \rangle. \quad (3)$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\langle \alpha jm' | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha jm \rangle = \frac{\delta_{m'm}}{2j+1} \langle \alpha j | V | \alpha j \rangle \langle \alpha j | J | \alpha j \rangle. \quad (4)$$

Verwenden Sie dieses Resultat, um das Verhältnis aus reduzierten Matrixelementen  $\frac{\langle \alpha j | V | \alpha j \rangle}{\langle \alpha j | J | \alpha j \rangle}$  zu bestimmen und schliessen Sie auf das Endergebnis

$$\langle \alpha j m' | \vec{V} | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha j m' | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha j m \rangle}{j(j+1)} \langle \alpha j m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle. \quad (5)$$

(b) 2 Punkte

i) Berechnen Sie für ein Vektoroperator  $\vec{V}$  und dem Drehimpulsoperator  $\vec{J}$  die folgenden Kommutatoren:

$$[J^2, V_i] = -i\epsilon_{ijk}(J_j V_k + V_k J_j) \quad (6)$$

$$[J^2, [J^2, V_i]] = 2(J^2 V_i + V_i J^2) - 4J_i(J \cdot V) \quad (7)$$

ii) Werten Sie nun das Matrixelement

$$\langle \alpha j m' | [J^2, [J^2, V_i]] | \alpha j m \rangle \quad (8)$$

auf zweierlei Arten aus und finden Sie erneut die Aussage des Vektormodells.