Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. A. Özçelik

Übungsblatt 7

Ausgabe: 21.01.22 – Abgabe: 03.02.22 bis 12:00 Uhr – Besprechung: 04.02.22

Dieses Übungsblatt enthält insgesamt 13 Punkte wovon die ersten 10 erreichten Punkte als regulär und die restlichen als Bonuspunkte gelten.

Aufgabe 1: Spin flip — 3 Punkte

Ein neutrales Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit magnetischem Moment $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ ist in einem externen homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ und befindet sich in einem Zustand mit einem bestimmten Wert der Spinprojektion entlang der Feldrichtung. Das Feld $\vec{B}_0$ hat eine hohe Intensität und wird deswegen klassisch behandelt. Die Wechselwirkung zwischen dem Teilchen und dem Magnetfeld wird dann durch den Operator

$$H_{\text{spin}} = -\vec{\mu} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{rad}})$$

beschrieben, wobei $\vec{B}_{\text{rad}}$ das durch elektromagnetische Strahlung hervorgerufene quantisierte Magnetfeld ist. Dieses wird als eine Störung betrachtet. In dieser Aufgabe soll die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit dafür berechnet werden, dass aufgrund eines Umklappen des Spins des Teilchens ein Photon emittiert wird.

(a) Für die Rechnung soll die Wirkung der Teilchenbahn auf die Emission vernachlässigt werden ($\vec{r} = 0$) und nur die Spinfreiheitsgrade betrachtet werden. Zeigen Sie, dass die differentielle Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit gegeben ist durch

$$\mathrm{d}w = \frac{\omega_k \mu^2 \mathrm{d}\Omega}{2\pi\hbar c} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot (\vec{k} \times \langle\psi_1|\vec{\sigma}|\psi_2\rangle) \right|^2,$$

wobei $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ die beiden Spinwellenfunktionen sind.

(b) Berechnen Sie aus dem Ausdruck in a) die Gesamtwahrscheinlichkeit w für die Emission des Photons.

Aufgabe 2: Photon-Streuung an sphärischem Rotor — 4 Punkte

In dieser Aufgabe soll der elastische Streuquerschnitt pro Zeiteinheit eines Photons an einem sphärischen Rotor mit Trägheitsmoment I und elektrischem Dipolmoment $\vec{d}$ entlang der Achse des Rotors berechnet werden. Der Rotor wird durch die Funktionen Y_{lm} beschrieben und hat die Energie $E_{\text{rotor}} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$. Die Wechselwirkung zwischen dem Rotor und dem Strahlungsfeld wird dabei durch

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -d_0 \vec{n} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0})$$

gegeben, wobei $\vec{E}_{\text{rad}}$ das elektrische Feld ist. Da wir Photonstreuung betrachten, trägt diese Wechselwirkung erst ab zweiter Ordnung in Störungstheorie bei. Die Formel dazu ist

$$\mathrm{d}w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi} + \sum_{\nu} \frac{V_{f\nu}V_{\nu i}}{E_i - E_\nu}\right|^2 \mathrm{d}\rho_f,$$

wobei V_{fi} in diesem Fall null ist und die Summe über alle erlaubten Zwischenzuständen läuft. Der Rotor befinde sich vor der Streuung im Grundzustand Y_{00}.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{rad}}(0)$.

(b) Geben Sie die Wellenfunktion und die Energie der erlaubten Zwischenzuständen an.

(c) Setzen Sie die in *b*) berechneten Wellenfunktionen in der obigen Formel ein. Argumentieren Sie, warum die Vollständigkeitsrelation für die Kugelflächenfunktionen der Zwischenzuständen eingesetzt werden kann, und berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma = \frac{V}{c}\mathrm{d}w_{fi}$.

(d) Die Polarisation des einfallenden Photons sei nicht bekannt. Mitteln Sie über die Polarisationen des einfallenden Photons, summieren Sie über die Polarisationen des ausgehenden Photons und berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt.

Aufgabe 3: Inverser photoelektrischer Effect — 3 Punkte

Der *inverse* photoelektrische Effekt (IPE) bezeichnet das Einfangen eines schnellen Elektrons durch einem Proton, wodurch ein Wasserstoffatom im Grundzustand entsteht sowie ein Photon emittiert wird.

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl freier Elektronenzustände im Energieintervall dE_e mit Ausbreitungsrichtung im Raumwinkel $d\Omega$ gegeben ist durch

$$\rho_e(E_e)\, dE_e\, d\Omega = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{mk_e}{\hbar^2}\, dE_e\, d\Omega\ , \tag{1}$$

während die entsprechende Anzahl von Photonzuständen gegeben ist durch

$$\rho_\gamma(E)\, dE\, d\Omega = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\omega^2}{\hbar c^3}\, dE\, d\Omega\ , \tag{2}$$

wobei $E = \hbar\omega = \hbar ck$. Die Energie des schnellen Elektrons ist näherungsweise gleich der Energie des emittierten Photons. Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Wellenvektoren des Photons und des Elektrons in dieser Näherung $k/k_e \approx v_e/(2c)$ ist.

(b) Passen Sie die Rechnung aus der Vorlesung für den Photoelektrischen Effekt (PE) an um zu zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt für den *inversen* Photoelektrischen Effekt gegeben ist durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{IPE}} = \frac{\hbar\omega}{mc^2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{PE}} = 16Z^5\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^2\left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{5/2}\sin^2\theta\ , \tag{3}$$

wobei die Bindungsenergie des Grundzustandes im Wasserstoffatom $I_0 = me^4/(2\hbar^2)$ viel kleiner als die Energie des Elektrons ist.

Aufgabe 4: Feinstrukturübergang **3 Punkte**

In den Vorlesungen wurde die Übergangsrate

$$w(2p \to 1s) = \frac{2^{17}}{3^{11}} \frac{e^2 a_B^2 \omega^3}{\hbar c^3} \approx 0.63 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \tag{1}$$

im Wasserstoffatom hergeleitet, wobei $\hbar\omega = E_{2p} - E_{1s}$ die Energiedifferenz zwischen den Niveaus ist. Unter Berücksichtigung der Lamb-Verschiebung spalten zwei Feinstruktur-Niveaus im Wasserstoff, $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$, sich auf.

(a) Berechnen Sie die Übergangsrate $w(2s_{1/2} \to 2p_{1/2})$. Es sei gegeben, dass $\Delta E = E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}} = 4.4 \cdot 10^{-6}$eV. Hinweis: Schauen Sie zurück auf Übungsblatt 2, Aufgabe 1(e).

(b) Das numerische Resultat für die Übergangsrate ist

$$w(2s_{1/2} \to 2p_{1/2}) \approx 0.81 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1} \; . \tag{2}$$

Was ist der Grund, dass dieser Übergang viele Größenordnungen langsamer erfolgt wie der Übergang $2p \to 1s$?