

Übungsblätter & Tutorien

Die Tutorien finden 14-tägig dienstags zwischen 14:00 und 19:00 Uhr statt, beginnend am 8.11.22. Die weiteren Termine sind der 22. Nov., 6. & 20. Dez., 17. & 31. Jan., sowie 14. Feb. An diesen Tagen erfolgt auch die Veröffentlichung der weiteren Übungsblätter.

In den Tutorien werden die Übungsaufgaben besprochen, deren Lösungen jeweils bis zum vorhergehenden Donnerstag, 17 Uhr, abgegeben werden müssen. Die Abgabe erfolgt entweder über den Kasten im Erdgeschoss des Physikhochhauses, oder online auf der Iliasseite zur Vorlesung: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1934769
Die Übungsblätter dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.

Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über die Webseite:
<http://www.physik.kit.edu/Tutorium/WS2223/TheorieE>
Die Registrierung ist bis 2.11.22, 14:00 Uhr, möglich. Die Einteilung wird am Abend des 2.11. auf Ilias bekannt gegeben.

Vorleistung

Zum Bestehen der Vorleistung müssen **mindestens 50% der Punkte** auf den Übungsblättern, also 70 von 140 Punkten, erreicht werden.

Beratungstutorium/Saalübung

Freitags bieten wir 8:00-9:30 Uhr im Otto-Lehmann-Hörsaal ein Beratungstutorium an, das der Vertiefung des Vorlesungs- und Übungsinhalts dient. Fragen bzw. Themenvorschläge dürfen gerne auch vorab an matthias.kerner@kit.edu geschickt oder im Forum auf Ilias gestellt werden.

Aufgabe 1.1: Messwahrscheinlichkeiten**4P**

- (a) **1P** Der Zustand eines Spin-1/2 Teilchens sei beschrieben durch

$$|\varphi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle,$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und den Eigenzuständen $|\pm\rangle$ des S_z Operators, $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$. Wir messen die Observable S_z . Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

- (b) **2P** Welche Werte und Wahrscheinlichkeit erhalten Sie, wenn stattdessen S_x gemessen wird?
- (c) **1P** Wir betrachten nun ein System aus 2 Spin-1/2 Teilchen, beschrieben durch den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle).$$

Eine Messung des Spins von Teilchen 1 in z -Richtung ergab den Wert $-\hbar/2$. Welche möglichen Werte und Wahrscheinlichkeiten erhalten Sie für eine anschließende Messung von $S_{2,z}$? Was erhalten Sie, wenn stattdessen $S_{2,x}$ gemessen wird?

Aufgabe 1.2: Translationsoperator**5P**

Untersuchen Sie den Translationsoperator

$$\mathcal{T}(\vec{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{a}\right).$$

- (a) **3P** Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G , die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$[x_i, G(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i}, \quad [p_i, F(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

- (b) **1P** Bestimmen Sie damit den Kommutator $[x_i, \mathcal{T}(\vec{a})]$.
- (c) **1P** Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle \vec{x} \rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\Psi\rangle$ mit einer Translation $|\Psi'\rangle = \mathcal{T}(\vec{a})|\Psi\rangle$?

Aufgabe 1.3: Drehimpuls und Oszillatoren**6P**

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch $+$, $-$ benannt) mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\pm}^{\dagger}$, $a_{\pm}$, die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_{\pm} = \hbar a_{\pm}^{\dagger} a_{\mp}, \quad J_z = \frac{\hbar}{2} (a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-}), \quad N = N_{+} + N_{-} = a_{+}^{\dagger} a_{+} + a_{-}^{\dagger} a_{-}.$$

- (a) **3P** Zeigen Sie, dass die $J_{\pm}$, J_z eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}] &= \pm \hbar J_{\pm}, & [J_{+}, J_{-}] &= 2\hbar J_z, & [\vec{J}^2, J_z] &= 0, \\ \text{wobei } \vec{J}^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, & \text{mit } J_x &= \frac{1}{2}(J_{+} + J_{-}) & \text{und } J_y &= \frac{1}{2i}(J_{+} - J_{-}) \end{aligned}$$

- (b) **2P** Zeigen Sie, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right).$$

Damit müsste es also einen Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|n_{+}, n_{-}\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|j, m\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?

- (c) **1P** Untersuchen Sie den Effekt der beiden Operatoren $K_{+} = a_{+}^{\dagger} a_{-}^{\dagger}$ und $K_{-} = a_{+} a_{-}$ auf einen beliebigen Zustand $|n_{+}, n_{-}\rangle$. Was ist also ihre Bedeutung?

Aufgabe 1.4: SU(2) und SO(3)**5P**

- (a) **1P** Zeigen Sie, dass jede hermitesche, spurlose 2×2 -Matrix P als $P = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden kann. Darin sind σ_i die Pauli-Matrizen und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.
- (b) **2P** Solch eine Matrix werde nun mit einer unitären Matrix $U \in SU(2)$ transformiert, $P' = U^{-1} P U$. Zeigen Sie, dass $P' = \vec{p}' \cdot \vec{\sigma}$ mit $\vec{p}' \in \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $\det P$ sowie $\det P'$. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, dass sich $\vec{p}$ wie ein dreidimensionaler Vektor unter Drehungen transformiert.
- (c) **2P** Wenn nun also U für $\vec{p}$ eine gewöhnliche Drehung R induziert, also $p'_i = R_{ij} p_j$, dann sollte es einen Zusammenhang zwischen R und U geben. Drücken Sie die Matricelemente R_{ij} mit Hilfe der Pauli-Matrizen durch U aus. Ist diese Zuordnung eindeutig?