

Aufgabe 2.1: Addition von Drehimpulsen

7P

Wir betrachten zwei Teilchen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$, das eine mit Drehimpuls l_1 , das andere mit Drehimpuls l_2 . In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, welche Drehimpulse j das kombinierte System, z.B. ein gebundener Zustand, haben kann. Dieser lässt sich als Produktzustand $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ schreiben. Außerdem verwenden wir die Bezeichnungen $\vec{J}^{(1)} = \vec{L}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$, $\vec{J}^{(2)} = \mathbb{1} \otimes \vec{L}^{(2)}$, sowie $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$.

- (a) **1P** Betrachten Sie die Basis des Zustandsraums des Gesamtsystems, die aus Vektoren der Form $|l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$ besteht. Wie wirken die Operatoren $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ und J_3 auf dieser Basis?
- (b) **1P** Betrachten Sie die Eigenwerte von J_3 und zeigen Sie, dass $j_1 + j_2$ der maximal mögliche Eigenwert von $\vec{J}^2$ ist.
- (c) **5P** Betrachten Sie den Fall $l_1 = l_2 = 1$.

Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, $|j, m\rangle$, ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|1, m_1\rangle \otimes |1, m_2\rangle$ Zustände? Mit anderen Worten: Bestimmen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$. Beachten Sie die Condon-Shortley-Konvention. Sie können die Koeffizienten für $|j, -m\rangle$ aus denen für $|j, m\rangle$ durch bekannte Symmetrien bestimmen. Als letzten Zustand werden Sie vermutlich $|0, 0\rangle$ berechnen. Überprüfen Sie, dass J_- auf diesen angewandt tatsächlich 0 ergibt.

Aufgabe 2.2: Sphärische Tensoren und Kugelflächenfunktionen

7P

- (a) **4P** Schreiben Sie xy , xz und $(x^2 - y^2)$ als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2.
Hinweis: Die Kugelflächenfunktionen Y_l^m sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang l . Schreiben Sie die in Frage kommenden Y_l^m in kartesischen Koordinaten.
- (b) **3P** Das Quadrupolmoment lässt sich als Erwartungswert

$$Q = e \langle \alpha, j, m = j | 3z^2 - r^2 | \alpha, j, m = j \rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e \langle \alpha, j, m' | x^2 - y^2 | \alpha, j, m = j \rangle$$

(mit $m' = j, j-1, \dots$) durch Q und geeignete Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus.

Aufgabe 2.3: π -Nukleon-Streuung

6P

π -Mesonen und Δ -Baryonen sind wie die Nukleonen N (Proton p und Neutron n) aus Quarks zusammengesetzt. Die wichtigste Quantenzahl für deren Charakterisierung ist der Isospin $\vec{I}$, welcher unter der starken Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße ist.

Die Isospinoperatoren haben dieselben Eigenschaften wie Drehimpulsoperatoren, genügen also den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k$ und Eigenzustände lassen sich charakterisieren durch $|I, I_z\rangle$.

Der Isospin der π -Mesonen und Nukleonen ist gegeben durch

$$|\pi^\pm\rangle = |1, \pm 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad |n\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Der Wirkungsquerschnitt für die π -Nukleon-Streuung $\sigma(\pi N \rightarrow \pi' N')$ ist gemäß

$$\sigma \sim |\langle \pi' N' | T | \pi N \rangle|^2$$

durch das Matrixelement des skalaren Operators T bestimmt, der invariant unter Isospin-Transformationen ist. Falls die Schwerpunktsenergie im Bereich der Δ -Resonanz liegt, d.h. bei ca. 1236 MeV, kann das Matrixelement für die Reaktion $\pi N \rightarrow \pi' N'$ folgendermaßen faktorisiert werden:

$$\langle \pi' N' | T | \pi N \rangle \sim \langle \pi' N' | T | \Delta \rangle \langle \Delta | T | \pi N \rangle$$

Die Δ -Baryonen sind hierbei Teilchen im $I = \frac{3}{2}$ -Quartett,

$$|\Delta^{++}\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \quad |\Delta^+\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad |\Delta^0\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad |\Delta^-\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Berechnen Sie die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n).$$

Hinweise: Wenden Sie das Wigner-Eckart-Theorem an. Die benötigten Clebsch-Gordan-Koeffizienten können Sie mit dem Mathematica Befehl `ClebschGordan` bestimmen, oder z.B. auf <https://pdg.lbl.gov/2022/reviews/rpp2022-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf> nachschauen.