

Aufgabe 4.1: Zeeman-Effekt

7P

Betrachten Sie nochmals den schon aus der Vorlesung bekannten Zeeman-Effekt eines wasserstoffartigen Atoms in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ mit den Hamiltonfunktionen

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m_e} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r}, \\ H_{LS} &= \frac{Z\alpha\hbar}{2m_e^2 c} \frac{1}{r^3} \vec{L} \cdot \vec{S}, \\ H_B &= \frac{eB}{2m_e} (J_z + S_z). \end{aligned}$$

Nun wollen wir aber den allgemeinen Fall behandeln, in dem das Magnetfeld beliebig groß sein kann und deswegen keine Aussage über die relative Stärke von H_{LS} und H_B getroffen werden kann. Dazu betrachten wir die Summe der beiden, $H_{LS} + H_B$, als Störterm zu H_0 .

- (a) **4P** Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu den beiden entarteten Zuständen $|n, j = l \pm \frac{1}{2}, m_j, l\rangle$.
- (b) **3P** Betrachten Sie die beiden Grenzfälle $\mu_B B \ll \Delta$ und $\Delta \ll \mu_B B$, und zeigen Sie, dass dies auf die in der Vorlesung behandelten Ergebnisse für den Zeeman-, sowie Paschen-Back-Effekt führt. Hierbei ist $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ das Bohrsche Magneton und Δ die durch H_{LS} induzierte Energieaufspaltung.

Hinweise:

- In der Basis $|n, j, m_j; l\rangle$ sind die Operatoren H_0 , H_{LS} , sowie J_z diagonal.
- Für die Addition von Bahndrehimpuls und Spin gilt (siehe Vorlesung):

$$|j = l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle = \pm \sqrt{\frac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m_j - \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m_j + \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Hiermit lässt sich S_z in Matrixform schreiben.

- Die Lösung von Aufgabenteil (a) hat die Form

$$\Delta E_{\pm} = \Delta_{LS,-} + \mu_B B m_j + \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \mu_B B \Delta \frac{m_j}{2l + 1} + \frac{1}{4} (\mu_B B)^2}$$

mit

$$\Delta_{LS,\pm} = \langle n, j = l \pm \frac{1}{2}, m_j, l | H_{LS} | n, j = l \pm \frac{1}{2}, m_j, l \rangle \quad \text{und} \quad \Delta = \Delta_{LS,+} - \Delta_{LS,-}.$$

Geben Sie $\Delta_{LS,\pm}$ auch explizit an.

Aufgabe 4.2: 2-Niveau-System mit harmonischem Potential**7P**

Betrachten Sie ein 2-Niveau System mit einem zeitabhängig oszillierendem, harmonischem Potential als Störung,

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad \text{mit} \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \hbar\gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

mit reellen und positiven ω und γ , sowie der Anfangsbedingung, dass zur Zeit $t = 0$ nur der Zustand 1 besetzt sei.

- (a) **4P** Verwenden Sie den Ansatz $|\Psi(t)\rangle = (\Psi_1(t), \Psi_2(t))^T$ mit $\Psi_i(t) = c_i(t)e^{-iE_i t/\hbar}$, um aus der Schrödingergleichung ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_i(t)$ herzuleiten und bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Systems.

Lösung:

$$c_1(t) = e^{-i\omega' t/2} \left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\omega'}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right), \quad c_2(t) = -2i\frac{\gamma}{\Omega} e^{i\omega' t/2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$
$$\text{mit} \quad \omega' = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} - \omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega'^2 + 4\gamma^2}.$$

- (b) **3P** Benutzen Sie nun Störungstheorie in niedrigster, nicht-trivialer Ordnung, um die Koeffizienten $c_i(t)$ zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 4.3: Wandernder Puls**6P**

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension in einem zunächst zeitlich konstanten Potential und betrachten das zeitunabhängige Problem als gelöst, d.h. wir kennen die Energieeigenzustände und -eigenwerte des Systems. Das Teilchen werde nun einem wandernden Puls ausgesetzt, beschrieben durch das Potential

$$V(t) = A \cdot \delta(x - ct).$$

Angenommen, das Teilchen befindet sich bei $t = -\infty$ im Grundzustand mit Eigenfunktion $\langle x|i\rangle = u_i(x)$.

- (a) **4P** Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei $t = +\infty$ in einem angeregten Zustand mit Eigenfunktion $\langle x|f\rangle = u_f(x)$ zu finden in erster Ordnung zeitabhängiger Störungsrechnung?
- (b) **2P** Was bedeutet dies physikalisch, wenn Sie den Puls als Superposition harmonischer Störungen auffassen, also

$$\delta(x - ct) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x/c - t)} ?$$

Welche Rolle spielt hier die Energieerhaltung?