

Aufgabe 6.1: Drei identische Teilchen

8P

Ein Atom mit drei Elektronen werde durch einen Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right]$$

beschrieben. Der Einteilchen-Hamiltonoperator hat nicht entartete Energieeigenwerte $E_1 < E_2 < E_3 < \dots$ zu Eigenzuständen $\psi_1(\vec{r})$, $\psi_2(\vec{r})$, $\psi_3(\vec{r})$, ... Wir verwenden die Abkürzung

$$\psi_{451} | + - + \rangle = \psi_4(\vec{r}_1) | + \rangle \otimes \psi_5(\vec{r}_2) | - \rangle \otimes \psi_1(\vec{r}_3) | + \rangle$$

für einen Zustand mit Elektron 1 im Einteilchenzustand $\psi_4(\vec{r}_1)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_4$, Elektron 2 im Zustand $\psi_5(\vec{r}_2)$ mit $s_z = -\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_5$ sowie Elektron 3 im Zustand $\psi_1(\vec{r}_3)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und $E = E_1$.

- (a) 3P Konstruieren Sie den Zustand $|\Psi\rangle$ der geringstmöglichen Energie, wenn der Gesamtspin $s = \frac{3}{2}$, $s_z = +\frac{3}{2}$ sein soll.
- (b) 3P Konstruieren Sie den Grundzustand $|G\rangle$ des Atoms mit $s_z = +\frac{1}{2}$. Welche Energie hat der Grundzustand?
- (c) 2P Welchen Gesamtspin hat der Zustand $|G\rangle$? Warum?

Aufgabe 6.2: Natürliche Einheiten

3P

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

- (a) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?
Hinweis: $c = 299\,792\,458$ m/s und $\hbar = 6,582119 \cdot 10^{-22}$ MeV s.
- (b) Welcher Masse in Kilogramm entspricht 1 MeV?
Hinweis: $1 \text{ eV} = 1,602176 \cdot 10^{-19}$ J.
- (c) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140$ MeV) in fm ($= 10^{-15}$ m) aus.

Aufgabe 6.3: $Z \rightarrow \tau^+ \tau^-$

2P

Ein ruhendes Z-Boson der Masse $M_Z = 91,1876 \text{ GeV}/c^2$ zerfalle in ein $\tau^+ \tau^-$ -Paar ($m_{\tau^\pm} = 1,7771 \text{ GeV}/c^2$).

- (a) Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Zerfallsprodukte (in GeV bzw. GeV/c).
- (b) Die mittlere Lebensdauer ruhender τ -Leptonen beträgt $2,903 \cdot 10^{-13}$ s. Wie weit kommen die τ -Leptonen im Mittel?

Aufgabe 6.4: Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens**7P**

Betrachten Sie ein relativistisches, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

- (a) **3P** Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \beta^2 = \vec{v}^2/c^2.$$

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential und Φ ist das skalare Potential.

- (b) **2P** Sei

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{\vec{F}_L \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K^i = \frac{F_L^i}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Zeigen Sie, dass für diese kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft gilt

$$K^\mu = qF^{\mu\nu} \frac{p_\nu}{m}$$

wobei p_ν der Viererimpuls des Teilchens und $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ der elektromagnetische Feldstärketensor ist. Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L$ ist, wie in der klassischen Mechanik, gegeben durch $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ das elektrische bzw. magnetische Feld bezeichnet.

- (c) **2P** Stellen Sie die kovariante Form der Bewegungsgleichung auf.