Moderne Theoretische Physik II
Übungsblatt 7
Wintersemester 2022/23
Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

Ausgabe: 31. Januar 2023
Abgabe: 9. Februar 2023
Besprechung: 14. Februar 2023

Bitte denken Sie daran, sich im Campus-System für die Vorleistung aus den Übungen und die Klausuren, an denen Sie teilnehmen möchten, anzumelden.
Auf diesem Übungsblatt können insgesamt 25 Punkte erreicht werden, wobei dieses Blatt bereits mit 20 Punkten als vollständig gelöst gilt. Mit den zusätzlichen Punkten kann somit ein Punkterückstand aus den vorherigen Übungsblättern ausgeglichen werden.

Aufgabe 7.1: Gamma-Algebra **5P**

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \cdot \mathbb{1}_4, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4, \\
\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 4g^{\alpha\beta}, \\
\not{a}\not{a} &= a^2 \cdot \mathbb{1}_4
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Antikommutatorrelation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4$.

Aufgabe 7.2: Fermionen in der Dirac-Gleichung **5P**

Zeigen Sie, dass für Lösungen der Dirac-Gleichung $\psi(x)$ auch

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \right)^2 - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi(x) = 0$$

gilt. Jede Komponente des Dirac-Spinors erfüllt also auch die Klein-Gordon-Gleichung.

Aufgabe 7.3: Drehimpuls im Zentralpotential **5P**

Betrachten Sie den Dirac-Hamilton-Operator für ein relativistischen Teilchen mit der Masse m, das sich im Zentralpotential $V(r)$ befindet

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r).$$

Berechnen Sie die Kommutatoren $[H, \vec{L}]$, $[H, \vec{S}]$ und $[H, \vec{L} + \vec{S}]$, wobei $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Bahndrehimpuls und

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

der Spinoperator ist. Betrachten Sie dabei die Dirac-Matrizen $\vec{\alpha}$ und β in der Dirac-Darstellung.

Aufgabe 7.4: Darstellungen der γ-Matrizen $\boxed{\textbf{5P}}$

Aus der Herleitung der Dirac-Gleichung folgt, dass die γ-Matrizen die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}$$

erfüllen müssen. Dies legt ihre exakte Form jedoch noch nicht fest.
Mögliche Darstellungen sind z.B. die *Dirac-Darstellung*

$$\gamma^0_D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i_D = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

oder die *chirale Darstellung*

$$\gamma^0_\chi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i_\chi = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^i.

(a) Zeigen Sie für die beiden Darstellungen durch explizite Rechnung, dass diese die Antikommutatorrelation, sowie $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = g^{\mu\mu}\gamma^\mu$ (keine Summe über μ) erfüllen.

(b) Finden Sie eine unitäre Transformation U, die die beiden Darstellungen über die Beziehung $\gamma^\mu_\chi = U\gamma^\mu_D U^{-1}$ verknüpft. Machen Sie dazu den Ansatz

$$U = \begin{pmatrix} a\,\mathbb{1}_2 & b\,\mathbb{1}_2 \\ c\,\mathbb{1}_2 & d\,\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

mit a, b, c, $d \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7.5: Lösung der Dirac-Gleichung in chiraler Darstellung $\boxed{\textbf{5P}}$

In der chiralen Darstellung (siehe Aufgabe 7.4) lassen sich die Lösungen der Dirac-Gleichung eines Teilchens mit Masse m und Viererimpuls $p = (E, p_x, p_y, p_z)^T$ schreiben als

$$u(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\,\chi_\lambda(p) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\,\chi_\lambda(p) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(p,\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\,\chi_{-\lambda}(p) \\ \lambda\sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\,\chi_{-\lambda}(p) \end{pmatrix},$$

mit den *Weyl-Spinoren*

$$\chi_+(p) = N \begin{pmatrix} |\vec{p}| + p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_-(p) = N \begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ |\vec{p}| + p_z \end{pmatrix}.$$

$N = 1/\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}| + p_z)}$ ist ein hier nicht relevanter Normierungsfaktor. Außerdem verwenden wir $\hbar = c = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_\pm(p) = \pm\chi_\pm(p).$$

Was bedeutet dies für den Spin der Teilchen?

(b) Zeigen Sie nun, dass $u(x,\lambda) = u(p,\lambda)e^{-ipx}$, sowie $v(x,\lambda) = v(p,\lambda)e^{ipx}$ Lösungen der Dirac-Gleichung sind. Welche Form haben die Lösungen, falls $m \ll E$?