

Aufgabe 1: Multiple Choice

- a) In drei Dimensionen sei ein kanonisches Ensemble von N nicht wechselwirkenden Teilchen mit Masse m gegeben, wobei die Energie-Impuls-Beziehung die Form $E(\vec{p}) = \Delta + |\vec{p}|^2/2m$ mit $\Delta > 0$ habe. Wie verhält sich die Zustandsdichte $N(E)$ für Energien E in der Nähe von Δ ?

☐ $N(E) \propto E^{1/2}$

☒ $N(E) \propto \Theta(E - \Delta) E^{1/2}$

☐ $N(E) \propto E^{1/2} \exp(-\Delta/kT)$

wobei $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ sonst.

1 Punkt

- b) Wie verhält sich die spezifische Wärme c_V des unter a) beschriebenen Ensembles bei tiefen Temperaturen?

☒ $c_V \propto N \exp(-\Delta/kT)$

☐ $c_V \propto \frac{3}{2} NkT$

☐ $c_V \propto \frac{3}{2} Nk$

1 Punkt

- c) Welche Abhängigkeit von der Frequenz besitzt die Zustandsdichte $N(\omega)$ akustischer Phononen in einem *drei-dimensionalen* Gitter bei kleinen Frequenzen ω ?

☐ $N(\omega) \propto \omega^{1/2}$

☒ $N(\omega) \propto \omega^2$

☐ $N(\omega) \propto \omega^{-1/2}$

1 Punkt

- d) Was ergibt sich aus der unter c) beschriebenen Frequenzabhängigkeit der Zustandsdichte für das Tieftemperaturverhalten der spezifischen Wärme akustischer Phononen?

☒ $c_V \propto NT^3$

☐ $c_V \propto NT^2$

☐ $c_V \propto NT$

1 Punkt

- e) Welche der nachstehenden Kurven entspricht der spezifischen Wärme eines kanonischen Ensembles von N nicht wechselwirkenden Spins im Magnetfeld B ?

☒ $c_V = Nk \left(\frac{\mu B}{kT} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(\mu B/kT)}$

☐ $c_V = Nk \left(\frac{kT}{\mu B} \right)^2 \exp(-\mu B/kT)$

☐ $c_V = Nk \left(\frac{\mu B}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2(\mu B/2kT)}$

1 Punkt

Aufgabe 2: Entropie idealer Quantengase

- a) Zeigen Sie ausgehend von den in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücken für das grosse Potential Ω des Fermi- und des Bosegases, daß die Entropie durch die mittlere Besetzungszahlen f_λ und g_λ wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$S = -k \sum_{\lambda} [f_{\lambda} \ln f_{\lambda} + (1 - f_{\lambda}) \ln(1 - f_{\lambda})] \quad (\text{Fermionen})$$

$$S = -k \sum_{\lambda} [g_{\lambda} \ln g_{\lambda} + (1 + g_{\lambda}) \ln(1 + g_{\lambda})] \quad (\text{Bosonen})$$

2 Punkte

- b) Die unter a) abgeleitete Entropie ist für beliebige Zustände gültig, die durch (beliebige) Besetzungszahlen f_λ (oder g_λ) charakterisiert werden. Bestimmen Sie mit der oben angegebenen Entropieausdrücke zusammen mit dem Ausdruck für die Innere Energie unabhängiger Teilchen das Minimum des grossen Potential Ω bezüglich Variation nach den Besetzungszahlen und zeigen Sie, daß sich daraus die Fermi- bzw die Boseverteilung ergeben.

3 Punkte

Aufgabe 3: Zwei wechselwirkende Spins

Betrachten Sie den folgenden Hamilton-Operator für ein System bestehend aus zwei wechselwirkenden Spins σ_1, σ_2 auf den Gitterplätzen 1 und 2, das sich in einem äußeren Magnetfeld B befindet:

$$\hat{H} = -J\sigma_1\sigma_2 - \mu B(\sigma_1 + \sigma_2) \quad J > 0, \sigma_{1,2} = \pm 1/2$$

- a) Zunächst sei das äußere Magnetfeld $B = 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K und daraus die spezifische Wärme c_V als Funktion der Temperatur T .
2 Punkte
- b) Nun werde das Magnetfeld angeschaltet, d.h. es ist $B \neq 0$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K , die freie Energie F und daraus die Magnetisierung M . Berechnen Sie damit die magnetische Suszeptibilität $\chi(T) = \frac{\partial M}{\partial B}|_{B=0}$ bei $B = 0$.
2 Punkte
- c) Skizzieren Sie $\chi(T)$ als Funktion der Temperatur.
1 Punkt

Aufgabe 4: Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung

Gegeben sei ein ferromagnetisches Ising-Modell von $N \gg 1$ Spins im Magnetfeld B , wobei jeder Spin σ_i mit gleicher Kopplung $J > 0$ mit jedem anderen Spin σ_j wechselwirkt.

$$H = -J \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad \sigma_i = \pm 1/2$$

Die obige Doppelsumme läuft uneingeschränkt über alle Gitterplätze, da eine Einschränkung $i \neq j$ zu einer irrelevanten Energieverschiebung führen würde und daher weggelassen werden kann.

- a) Wie drückt sich die Magnetisierung $\tilde{M}$ für eine bestimmte Spin-Konfiguration durch die Werte der Einzelspins σ_i aus?

1/2 Punkt

- b) Begründen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, daß bei $N \rightarrow \infty$ die Magnetisierung $\tilde{M}$ in den thermodynamischen Mittelwert $M(T, B)$ übergeht. Zeigen Sie damit, daß sich die Hamiltonfunktion H exakt als die Summe der Energien von N *nicht wechselwirkenden* Spins in einem effektiven Magnetfeld B_{eff} schreiben läßt. Wie lautet B_{eff} ?

1 Punkt

- c) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K . Leiten Sie daraus die Bestimmungsgleichung für $M(T, B)$ her.

1 1/2 Punkte

- d) Nun sei $B = 0$. Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c des ferromagnetischen Phasenübergangs, unterhalb derer Lösungen mit $M \neq 0$ existieren.

1 Punkt

- e) Bestimmen Sie $M(T, B)$ für $B = 0$ als Funktion der Temperatur T in führender Ordnung in der Nähe von T_c durch Entwickeln der Bestimmungsgleichung nach kleinen $M(T)$.

1 Punkt

Aufgabe 5: Teilchen im Doppelmuldenpotential

Ein vereinfachtes Modell eines Teilchens in einem Doppelmuldenpotential besteht darin, sowohl in der linken als auch in der rechten Mulde je einen gebundenen Zustand, $|L\rangle$ bzw. $|R\rangle$, mit zugehörigen Energien $\epsilon_L = \epsilon - \Delta/2$ bzw. $\epsilon_R = \epsilon + \Delta/2$ anzunehmen. Zusätzlich wird ein Tunneln mit dem entsprechenden Tunnelmatrixelement $\tau > 0$ zwischen diesen beiden Zuständen erlaubt, so daß der zugehörige Hamiltonoperator nachstehende Form hat:

$$\hat{H} = \epsilon_L |L\rangle\langle L| + \epsilon_R |R\rangle\langle R| + \tau (|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$$

Im folgenden wird ein symmetrisches Doppelmuldenpotential mit $\Delta = 0$ betrachtet.

- a) Bestimmen Sie die Matrixform des Hamiltonoperators $\hat{H}$ bzgl. der Basis $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ und berechnen Sie die Eigenenergien und Eigenzustände von $\hat{H}$.

1 Punkt

- b) Zur Zeit $t=0$ sei das Teilchen im linken Potentialtopf, d.h. $|\psi(t=0)\rangle = |L\rangle$. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung $|\psi(t)\rangle$ dieses Anfangszustands. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür das Teilchen zur Zeit t im linken Potentialtopf zu finden?

1 Punkt

- c) In der Basis $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ seien zur Zeit $t=0$ die folgenden Zustandsoperatoren gegeben:

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Zustandsoperatoren beschreiben reine und welche beschreiben gemischte Zustände? Welcher Zustandsoperator entspricht einem der in a) berechneten Eigenzustände und welcher entspricht dem in a) gegebenen Anfangszustand. Begründen Sie Ihre Antworten!

1 Punkt

- d) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ und daraus den zeitabhängigen Zustandsoperator $\hat{W}(t)$ für den in a) gegebenen Anfangszustand. Welcher Operator $\hat{O}_L$ gehört zu der Observablen "Teilchen befindet sich in der linken Potentialmulde"? (Begründung!). Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{O}_L \rangle(t)$ für diese Observable und den obigen Zustandsoperator $\hat{W}(t)$.

2 Punkte