Universität Karlsruhe SS 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **16.07.04**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Klausur zur Vorlesung Theorie F SS 2004

Name:		**Matrikelnr.:**	
Vorname:		**Tutor / Übungsgr.:**	

Wichtige Hinweise:

- ☐ **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**

- ☐ **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- ☐ **Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.**
- ☐ **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- ☐ **Dieses Blatt mit abgeben.**

- ☐ **Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgerät.**

***** Formelsammlungen jeder Art oder Skripte sind NICHT zugelassen *****

Rückgabe von Klausur und Scheinen am nächsten Dienstag in den Übungsgruppen

Bitte wenden: Aufgaben auf der Rückseite $\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Üb.	Schein
Punkte									
von maximal	2	6	8	8	3	3	30	71	

$\boxed{1}$ Geben Sie $c_V(T)$ und $\chi(T)$ im Limes kleiner Temperaturen $T \to 0$ an, ohne Rechnung, ohne konstante Vorfaktoren:

a) Für nicht wechselwirkende Spins $S = 1/2$; [1 P]

b) für ein ideales Elektronengas. [1 P]

$\boxed{2}$ Spinwellen in einem Ferromagneten können als ein ideales Bose-Gas mit der Dispersion $\hbar\omega(\mathbf{k}) = Dk^2$ und $\mu = 0$ aufgefaßt werden (D =Konstante).

a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\delta(\varepsilon - \hbar\omega(\mathbf{k}))$. [3 P]

b) Berechnen Sie die mittlere Dichte angeregter Spinwellen $n(T) = 2\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, g_{\mathbf{k}}$.
Konstante Faktoren in $n(T)$ brauchen nicht berechnet werden! [3 P]

$\boxed{3}$ Das einfachste Modell für einen weißen Zwerg ist ein Gas N idealer relativistischer Elektronen in einem Volumen V bei der Temperatur $T = 0$.

a) Man berechne den Fermi-Wellenvektor k_F als Funktion von N, V, $N = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\, f_{\mathbf{k}}$. [2 P]

b) Geben Sie zunächst den allgemeinen Ausdruck für die innere Energie U des idealen Elektronengases bei $T = 0$ an. Man berechne U und den Pauli-Druck $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N$ als Funktion von N, V, mit der Dispersion $\varepsilon(\mathbf{k}) = c\hbar k$ (ultrarelativistisch). [3 P]

c) Man berechne $U(N, V)$ und $p(N, V)$ nichtrelativistisch, mit $\varepsilon(\mathbf{k}) = mc^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m}$. [3 P]

$\boxed{4}$ Das Landau-Funktional für die freie Energie eines Ferromagneten (Spin S) in einem Magnetfeld $h = |\mathbf{h}|$ lautet (N, T_c und b sind Konstanten)

$$\frac{1}{N}F(T, m, h) = \frac{1}{2}t\, m^2 + \frac{1}{4}b\, m^4 - h\, m - kT\ln(2S + 1) \quad , \quad t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad ,$$

a) Es sei $h = 0$. Bestimmen Sie die Magnetisierung $m(T)$ über $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$, identifizieren Sie die physikalische Lösung für **(i)** $T \geq T_c$ und **(ii)** $T < T_c$. Geben Sie nun $F(T)$ an. [4 P]

b) ($h = 0$:) Berechnen Sie $S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T}$ und daraus $c_V(T) = T\frac{\partial S}{\partial T}$ für **(i)** und **(ii)**. [2 P]

c) Es sei nun $h \neq 0$. Man berechne $\chi(T) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial m}{\partial h}$. *Hinweis:* $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right) = 0$. [2 P]

$\boxed{5}$ In einem Doppelmuldenpotential kann ein einzelnes Teilchen zwei Zustände mit den Energien $\varepsilon = +\Delta, -\Delta$ annehmen. Für zwei nicht wechselwirkende Teilchen in diesem Potential lautet der Hamiltonoperator also

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 \quad , \quad \hat{h}_1|\sigma_1\rangle^1 = \Delta\,\sigma_1|\sigma_1\rangle^1 \quad , \quad \hat{h}_2|\sigma_2\rangle^2 = \Delta\,\sigma_2|\sigma_2\rangle^2 \quad , \quad \sigma_1 = +1, -1 \quad , \quad \sigma_2 = +1, -1$$

Die Teilchen sind *identische Fermionen*, haben aber *keinen Spin.*

Geben Sie die normierten Eigenzustände $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ und -energien von $\hat{H}$ an, und bestimmen Sie damit die kanonische Zustandssumme Z_K, die freie Energie $F = -kT\ln(Z_K)$ und die Entropie $S(T)$. Was bedeutet das Ergebnis von $S(T)$? [3 P]

$\boxed{6}$ Eine Oberfläche befindet sich in einem Gas mit der Temperatur T. Die Oberfläche enthält insgesamt M Gitterplätze, an jeden Gitterplatz kann höchstens ein Gasatom gebunden (adsorbiert) werden. Die Energie eines freien Gasatoms ist 0, die eines gebundenen ist u.

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme der Oberfläche und die mittlere Zahl N_{ad} besetzter Gitterplätze als Funktion von T, M, u.
Was ergibt sich für den Anteil besetzter Plätze $n_{ad} = N_{ad}/M$ bei $T \to 0$? [3 P]