$\boxed{\mathbf{1}}$ **a)** Nicht wechselwirkende Spins:

$\chi(T) = \dfrac{C}{T}$ (Curie-Gesetz) $\boxed{\mathbf{1}\ \text{Punkt}}$ $c_V(T) = 0$ $\boxed{\mathbf{0}\ \text{Punkte}}$

b) Freie Elektronen, d.h., ideale Fermionen mit Spin $1/2$:

$\chi(T) = const.$ (Pauli-Suszeptibiliotät) $\boxed{\mathbf{1/2}\ \text{Punkt}}$ $c_V(T) = \gamma T$ $\boxed{\mathbf{1/2}\ \text{Punkt}}$

$\boxed{\sum = \mathbf{2}\ \text{Punkte}}$

$\boxed{2}$ **a)** *Methode 1*:

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 \mathrm{d}k \, \delta(\varepsilon - D\,k^2)$$

Neue Integrationsvariable:

$$E = D\,k^2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{E}{D}} \quad , \quad \mathrm{d}E = 2Dk\mathrm{d}k \quad \Rightarrow \quad k^2\mathrm{d}k = \frac{\sqrt{E}}{2D^{3/2}}\mathrm{d}E$$

damit folgt

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2D^{3/2}} \int_0^\infty \mathrm{d}E \, \sqrt{E}\, \delta(\varepsilon - E) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 D^{3/2}} \quad \boxed{\textbf{3} \text{ Punkte}}$$

[Genau genommen trägt die δ-Funktion nur für $\varepsilon > 0$ bei, es müßte also korrekt konkret heißen: $\mathcal{N}(\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 D^{3/2}} \Theta(\varepsilon)$.]

Methode 2: Falls man sich erinnert, daß

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad , \quad f(x_0) = 0$$

dann gilt

$$\delta(\varepsilon - Dk^2) = \frac{\delta(k - k_0)}{|2Dk_0|} \quad , \quad \varepsilon = Dk_0^2 \quad \Rightarrow \quad k_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$$

und damit

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2Dk_0} \int_0^\infty k^2 \mathrm{d}k \, \delta(k - k_0) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k_0}{D} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi^2 D^{3/2}}$$

b) $g_{\mathbf{k}}$ soll natürlich die Bose-Funktion sein, also, mit $\mu = 0$,

$$n(T) = 2 \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega(\mathbf{k})/kT} - 1} \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

Mit der Zustandsdichte von oben:

$$n(T) = 2 \int \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\mathcal{N}(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = \frac{1}{2\pi^2 D^{3/2}} \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

Standard-Trick: Dimensionslose Integrationsvariable einführen:

$$x = \frac{\varepsilon}{kT} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = kT\,x \quad , \quad \mathrm{d}\varepsilon = kT\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

damit läßt sich die Abhängigkeit von T ablesen:

$$n(T) = \frac{1}{2\pi^2 D^{3/2}} (kT)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}}_{= \, const.} \quad \Rightarrow \quad n(T) = const.'\, T^{3/2} \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

$\boxed{\Sigma = \textbf{6} \text{ Punkte}}$

3 **a)** Bei $T = 0$ ist $f_{\mathbf{k}} = \Theta(k_F - k)$, also

$$\frac{N}{V} = 2\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\Theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}} \quad = 2\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} k^2\mathrm{d}k = 2\frac{4\pi}{3}\left(\frac{k_F}{2\pi}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_F}{2\pi} = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3} \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

b) Innere Energie:

$$U(N,V) = 2V\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\varepsilon(\mathbf{k})\, f_{\mathbf{k}} \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

Ultrarelativistisch:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar ck \quad \Rightarrow \quad U = 2V\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\hbar c\int_0^{k_F} k^2\mathrm{d}k\, k = 4\pi^2 V\hbar c\left(\frac{k_F}{2\pi}\right)^4 = const.\,(k_F)^4 V \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

Einsetzen von k_F,

$$U(N,V) = const.'\, V\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = const.'\,\frac{N^{4/3}}{V^{1/3}} = const.'\, N\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

Druck:

$$p(N,V) = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_N = const.''\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

[Man beachte: U ist extensiv, $U \sim V$ oder $U \sim N$, p ist intensiv.]

c) Nichtrelativistisch:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = mc^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad U = mc^2\underbrace{\left(2V\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}f_{\mathbf{k}}\right)}_{=N} + \frac{V\hbar^2}{m}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,k^2\,f_{\mathbf{k}} \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

$$U(N,V) = Nmc^2 + \frac{V\hbar^2}{m}\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} k^2\mathrm{d}k\, k^2 = Nmc^2 + V\frac{16\pi^3\hbar^2}{5m}\left(\frac{k_F}{2\pi}\right)^5 \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

k_F einsetzen und Druck machen:

$$U(N,V) = Nmc^2 + const.\,\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \quad \Rightarrow \quad p(N,V) = const.'\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

$\boxed{\Sigma = \mathbf{8}\text{ Punkte}}$

$\boxed{4}$ **a)** $h=0: \quad \frac{1}{N}F(T,m) = \frac{1}{2}tm^2 + \frac{1}{4}bm^4 - kT\ln(2S+1) \quad , \quad t = \frac{T-T_c}{T_c}$

Gleichgewichtswert der Magnetisierung:

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 = tm + bm^3 = (t+bm^2)m \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{m=0} \quad \text{oder} \quad \boxed{m = \pm m_0} \quad , \quad m_0 = \sqrt{-t/b} \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

Jetzt muß man für $t>0$ bzw. $t<0$ die physikalische Lösung identifizieren:

$$\begin{array}{llll} (i) & T \geq T_c\,, \quad t \geq 0 & \Rightarrow & m_0 = \text{imaginär} \quad \Rightarrow \quad m = 0 \\ (ii) & T < T_c\,, \quad t < 0 & \Rightarrow & m = 0 \;\text{ und }\; m = \pm m_0 \;\text{ sind möglich} \\ & & & \Rightarrow \quad \text{vergleiche freie Energie:} \end{array}$$

$$\begin{aligned} m = 0 \qquad &: \; F(T) &=& \; -NkT\ln(2S+1) \\ m = \pm m_0 \;\; &: \; F(T) &=& \; -NkT\ln(2S+1) + \frac{N}{2}tm_0^2 + \frac{N}{4}bm_0^4 \\ & &=& \; -NkT\ln(2S+1) - N\frac{t^2}{4b} \end{aligned}$$

Für $T < T_c$, d.h. $t<0, t^2 \neq 0$, führt die Lösung $m = \pm m_0$ offenbar auf die kleinere freie Energie, ist also im Gleichgewicht realisiert. $\boxed{\textbf{2} \text{ Punkte}}$

[Für $T \geq T_c$ scheinbar auch, aber da ist ja m_0 unphysikalisch, und man muß $m=0$ annehmen; siehe oben.]

Die freie Energie kann man z.B. so schreiben:

$$F(T) = -\frac{Nt^2}{4b}\Theta(T_c - T) - NkT\ln(2S+1) \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

Zusammengefaßt lautet der Ordnungsparameter:

$$m(T) = \pm m_0\Theta(T_c - T) \quad , \quad m_0 = \sqrt{-\frac{t}{b}} = \sqrt{\frac{T_c - T}{bT_c}}$$

b) Entropie und spez. Wärme:

$$T \geq T_c: \quad S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk\ln(2S+1) \quad \Rightarrow \quad c_V(T) = T\frac{\partial S}{\partial T} = 0 \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}}$$

[Die Entropie ist offenbar die Entropie von N freien Spins S, nach Boltzmann: $S = k\ln(\Omega)$.]

$$\begin{aligned} T < T_c: \quad S(T) &= Nk\ln(2S+1) + \frac{N}{4b}2t\frac{\partial t}{\partial T} \\ &= Nk\ln(2S+1) + \frac{N}{2bT_c^2}(T - T_c) \\ &\Rightarrow \; c_V(T) = T\frac{N}{2bT_c^2} \quad \boxed{\textbf{1} \text{ Punkt}} \end{aligned}$$

Die spez. Wärme springt also bei $T = T_c$, von 0 auf $\frac{N}{2bT_c}$.

c) $h \neq 0$: $\frac{1}{N} F(T, m, h) = \frac{1}{2} t m^2 + \frac{1}{4} b m^4 - h m - kT \ln(2S+1)$

Gleichgewichtswert der Magnetisierung *mit* Magnetfeld:

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 = tm + bm^3 - h$$

Auflösen nach $m(t,h)$ ungünstig, aber man kann ja ohne weiteres die 0 nach h ableiten (siehe Hinweis):

$$0 = \frac{\partial}{\partial h}(tm + bm^3 - h) = t\frac{\partial m}{\partial h} + 3bm^2\frac{\partial m}{\partial h} - 1$$

Jetzt kann man den $\lim\limits_{h \to 0}$ ausführen und $\chi(T)$ identifizieren,

$$\lim_{h \to 0} \quad \Rightarrow \quad 0 = (t + 3bm^2)\,\chi(T) - 1 \quad \Rightarrow \quad \chi(T) = \frac{1}{t + 3bm(T)^2} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

Einsetzen von $m(T)$ liefert (jetzt ist ja $h = 0\,!$)

$$T \geq T_c \; : \; m(T) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \chi(T) = \frac{1}{t} = \frac{T_c}{T - T_c} \qquad \text{Curie–Weiss-Gesetz}$$

$$T < T_c \; : \; m(T)^2 = m_0^2 = -\frac{t}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \chi(T) = \frac{1}{-2t} = \frac{1}{2}\frac{T_c}{T_c - T} \qquad \boxed{\textbf{1 Punkt}}$$

$\boxed{\Sigma = \textbf{8 Punkte}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 Fermionen: antisymmetrischer Zustand:

$$|\sigma_1,\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_1\rangle^1|\sigma_2\rangle^2 - |\sigma_2\rangle^1|\sigma_1\rangle^2) \quad , \quad \hat{H}|\sigma_1,\sigma_2\rangle = \Delta(\sigma_1+\sigma_2)|\sigma_1,\sigma_2\rangle \quad \boxed{\mathbf{1}\text{ Punkt}}$$

Normierung!

Im 2-Niveau-System bleiben nur zwei Zustände $\neq 0$ übrig:

$$|+1,-1\rangle \quad , \quad |-1,+1\rangle = -|+1,-1\rangle$$

In der Zustandssumme

$$Z_K = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma_1,\sigma_2=\pm1}\langle\sigma_1,\sigma_2|e^{-\hat{H}/kT}|\sigma_1,\sigma_2\rangle = \langle+1,-1|e^{-\hat{H}/kT}|+1,-1\rangle = e^0\langle+1,-1|+1,-1\rangle = 1$$

liefern beide den gleichen Beitrag. Der Vorfaktor $1/N! \equiv 1/2!$ dient dazu, alle physikalisch äquivalenten Zustände nur einmal zu zählen, so daß letztlich ein einziger Zustand in Z_K übrig bleibt. Damit folgt sofort

$$F = -kT\ln(Z_K) = 0 \quad\Rightarrow\quad S(T) = 0 \quad \boxed{\mathbf{2}\text{ Punkte}}$$

Die Entropie ist 0, weil sich das System in einem reinen Zustand befindet: ein Teilchen in $+1$, das andere in -1, weitere Zustände läßt das Pauli-Prinzip nicht zu.

$\boxed{\Sigma = \mathbf{3}\text{ Punkte}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Es ist hilfreich, sich zuerst die Mikrozustände und -energien aufzuschreiben, muß aber nicht sein:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Mikrozustände:} & \{|\alpha\rangle\} & = & \{|n_1\rangle^1 |n_2\rangle^2 \cdots |n_M\rangle^M\} \ , \quad n_i = 0,1 \\
\text{Energie:} & E_\alpha & = & (n_1 + n_2 + \ldots + n_M)\, u \\
\text{“Teilchenzahl”:} & N_\alpha^{ad} & = & (n_1 + n_2 + \ldots + n_M) \\
\text{Zustandssumme:} & Z_K & = & \sum_\alpha \exp(-E_\alpha/kT)
\end{array}$$

Die Zustandssumme faktorisiert,

$$Z_K = \sum_{n_1 \ldots n_M} \exp(-\frac{u}{kT}(n_1 + n_2 + \ldots + n_M)) = (Z_1)^M \ ,$$

$$Z_1 = \sum_{n=0,1} \exp(-\frac{u}{kT} n) = 1 + e^{-u/kT} \quad \boxed{\mathbf{1}\ \text{Punkt}}$$

Die “Teilchenzahl” ist als thermischer Mittelwert definiert,

$$\begin{aligned}
N_{ad} &= \langle N_\alpha^{ad} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_\alpha N_\alpha^{ad} \exp(-E_\alpha/kT) \\
&= \frac{1}{(Z_1)^M} \sum_{n_1,\ldots,n_M} (n_1 + \ldots + n_M) \exp(-\frac{u}{kT}(n_1 + \ldots + n_M)) \\
&= M \frac{1}{Z_1} \sum_{n=0,1} n e^{-un/kT} = \frac{M}{e^{u/kT} + 1} \quad \boxed{\mathbf{1.5}\ \text{Punkte}}
\end{aligned}$$

Man kann sich alternativ auch überlegen, daß

$$E_\alpha = u\, N_\alpha^{ad} \quad \Rightarrow \quad N_{ad} = -\frac{1}{Z} kT \left(\frac{\partial Z_K}{\partial u} \right)_T = -kT \frac{\partial}{\partial u} \ln(Z_K) = -MkT \frac{1}{Z_1} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial u} \right)_T$$

Das Ergebnis ist dasselbe.

Dies ist offenbar eine Fermi-Funktion, und bei $T \to 0$ gibts

$$n_{ad} = \frac{N_{ad}}{M} = \frac{1}{e^{u/kT} + 1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{T \to 0} n_{ad} = \Theta(-u) \quad \boxed{\mathbf{1/2}\ \text{Punkt}}$$

$\boxed{\Sigma = \mathbf{3}\ \text{Punkte}}$