

Nachklausur zur Vorlesung Theorie F SS 2004

Name: Matrikelnr.:

Vorname:

Wichtige Hinweise:

- ☐ Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- ☐ Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.
- ☐ Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.
- ☐ Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.
- ☐ Dieses Blatt mit abgeben.
- ☐ Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgerät.

***** Formelsammlungen jeder Art oder Skripte sind NICHT zugelassen *****

Bitte wenden: Aufgaben auf der Rückseite $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Üb.	Schein
Punkte								
von maximal	6	8	5	5	6	30	71	

- 1** Ein *ideales Bose-Gas* aus N Teilchen mit Dispersion $E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ befindet sich in der Ebene in einem 2-dimensionalen "Würfel" mit $V = L^2$. Die Dichte N/V sei konstant.
- a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $\mathcal{N}_2(\varepsilon) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta(\varepsilon - E(\mathbf{k}))$,
und zeigen Sie, daß $\mathcal{N}_2$ die Form $\mathcal{N}_2(\varepsilon) = \tilde{\mathcal{N}} \Theta(\varepsilon)$ hat. [2 P]
- b) Die mittlere Dichte des Gases ist gegeben durch

$$\langle n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \mathcal{N}_2(\varepsilon) g(\varepsilon - \mu) \quad , \quad g = \text{Bosefunktion} .$$
Nehmen Sie an, das Bose-Gas kondensiert bei $T = T_0$. Welchen Wert hat $\mu|_{T=T_0}$? [1 P]
Gewinnen Sie aus der Bedingung $N/V = \langle n \rangle|_{T=T_0}$ einen Ausdruck für T_0 , [2 P]
und begründen Sie damit, daß $T_0 = 0$. [1 P]
- 2** Nun befindet sich ein *ideales Fermi-Gas* (ohne Spinfreiheitsgrad) aus N Teilchen in dem "Würfel" mit $V = L^2$, $N/V = \text{const.}$ in der Ebene, mit $E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$. Es gilt also

$$\frac{N}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \mathcal{N}_2(\varepsilon) f(\varepsilon - \mu) \quad , \quad \frac{U}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \mathcal{N}_2(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon - \mu) \quad , \quad f = \text{Fermifunktion} .$$
- a) Es sei $T = 0$. Man berechne die Fermienergie E_F . [2 P]
- b) Es sei $kT \gg E_F$ (klassischer Grenzfall). Man berechne das chemische Potential μ als Funktion von kT und E_F . Es darf $\frac{\mu}{kT} \gg 1$ angenommen werden. [3 P]
- c) Was erwarten Sie als Ergebnis für $U(T, N)$ für $kT \gg E_F$? (mit Begründung) [1 P]
Berechnen Sie nun U für $kT \gg E_F$ und vergleichen Sie. [2 P]
(Das auftretende Integral kann elementar berechnet werden.)
- 3** In einem 1-dimensionalen Magneten auf der Achse $0 \leq x < \infty$ sei eine inhomogene Magnetisierung $m(x)$ zugelassen. Für $T > T_c$ lautet dann das Landau-Funktional für die freie Energie

$$F[T, m(x)] = \int_0^{\infty} dx \left[\frac{t}{2} m(x)^2 + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial m(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \quad , \quad t = \frac{T - T_c}{T_c} > 0 \quad , \quad \gamma = \text{const.} > 0$$
- a) Gewinnen Sie eine Gleichung für den Gleichgewichtswert $\tilde{m}(x)$ aus dem Verschwinden der linearen Variation $\delta F = 0$, über den Ansatz $m(x) = \tilde{m}(x) + \delta m(x)$, $\delta m(0) = \delta m(\infty) = 0$, oder durch richtiges Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung. [3 P]
- b) Am Rand $x = 0$ wird durch ein kleines Magnetfeld eine Magnetisierung $\tilde{m}(0) = m_0$ induziert. Bestimmen Sie $\tilde{m}(x)$ für die Randbedingungen $\tilde{m}(0) = m_0$, $\tilde{m}(\infty) = 0$. [2 P]
- 4** Ein System befinde sich in einem Zustand mit dem statistischen Operator $\hat{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Beschreibt $\hat{W}$ einen gemischten oder einen reinen Zustand? [2 P]
- b) Berechnen Sie die Entropie $S = -k \text{Tr}[\hat{W} \ln(\hat{W})]$ in einer geeigneten Basis. [2 P]
Entspricht das Ergebnis der Erwartung? (Begründung!) [1 P]
- 5** Auf einer Oberfläche befinden sich N Quantendots (Potentialtöpfe), die nicht untereinander wechselwirken. Das Energiespektrum eines Dots lautet $E(n) = E_0 n$, $E_0 > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z der Oberfläche. [2 P]
- b) Man berechne die mittlere Zahl $\langle N_\alpha \rangle$ von Dots, die sich im Zustand $n = \alpha$ befinden. [2 P]
Geben Sie $\langle N_\alpha \rangle$ für $T \rightarrow \infty$ und für $T \rightarrow 0$ an, und interpretieren Sie das Ergebnis. [2 P]