$\boxed{1}$ **a)**

$$\mathcal{N}_2(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2}\int \mathrm{d}^2k\,\delta(\varepsilon - \frac{\hbar^2k^2}{2m}) \quad , \quad \mathrm{d}^2k = k\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\mathrm{d}k\,\delta(\varepsilon - \frac{\hbar^2k^2}{2m})$$

Substitution: $u = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m} \quad , \quad \mathrm{d}u = \dfrac{\hbar^2}{m}k\,\mathrm{d}k$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{N}_2(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u\,\delta(\varepsilon - u) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{N}_2(\varepsilon) = \widetilde{\mathcal{N}}\,\Theta(\varepsilon) \quad , \quad \widetilde{\mathcal{N}} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}}$$

2 Punkte

b) Bose-Kondensation bei $T = T_0$: Das chemische Potential wird bei T_0 null,

$\boxed{\mu(T = T_0) = 0}$. **1** Punkt

$$T = T_0 \; : \quad \frac{N}{V} = \langle n\rangle|_{T=T_0,\mu=0} = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\varepsilon\,\frac{\mathcal{N}_2(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT_0}-1} = \widetilde{\mathcal{N}}\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\,\frac{1}{e^{\varepsilon/kT_0}-1}$$

Wie üblich: Integral dimensionslos machen: $x = \dfrac{\varepsilon}{kT_0} \quad , \quad \mathrm{d}\varepsilon = kT_0\,\mathrm{d}x\,,$

$$\Rightarrow \quad \frac{N}{V} = \widetilde{\mathcal{N}}kT_0\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{kT_0 = \frac{N}{V}\frac{1}{\widetilde{\mathcal{N}}}\frac{1}{C} = \frac{N}{V}\frac{2\pi\hbar^2}{m}\frac{1}{C}}$$

mit der numerischen Konstanten $C = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1}\,.$ **2** Punkte

$T_0 = 0\,?!$

Die Konstante C muß wohl ∞ sein. Der Integrand divergiert tatsächlich an der unteren Grenze: $\dfrac{1}{e^x-1} \simeq \dfrac{1}{x}$, also geht $C \to \infty$ und damit $T_0 \to 0\,.$ **1** Punkt

Anmerkung: Genauer geht das so:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1}$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1} = -\lim_{\delta\to 0}\ln(\delta) + \text{reguläre Terme} \to \infty$$

In zwei Dimensionen gibt es keine Bose-Kondensation bei endlicher Temperatur.

$\Sigma =$ **6** Punkte

$\boxed{2}$ **a)** $T = 0: \quad \mu(T=0) = E_F \quad , \quad f(\varepsilon - \mu) \to f(\varepsilon - E_F)|_{T=0} = \Theta(E_F - \varepsilon)$

das einsetzen und ausrechnen:

$$\frac{N}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, \mathcal{N}_2(\varepsilon)\, \Theta(E_F - \varepsilon) = \widetilde{\mathcal{N}} \int_0^{E_F} \mathrm{d}\varepsilon \; = \widetilde{\mathcal{N}} E_F \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_F = \frac{N}{V} \frac{1}{\widetilde{\mathcal{N}}} = \frac{N}{V} \frac{2\pi\hbar^2}{m}}$$

$\boxed{\textbf{2}\text{ Punkte}}$

b) Klassischer Grenzfall $kT \gg E_F$: Annahme $\dfrac{-\mu}{kT} \gg 1$

$$e^{-\mu/kT} \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(\varepsilon - \mu) = [\, e^{\varepsilon/kT} e^{-\mu/kT} + 1\,]^{-1} \simeq e^{\mu/kT}\, e^{-\varepsilon/kT}$$

$\boxed{\textbf{1}\text{ Punkt}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{N}{V} = e^{\mu/kT} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, \mathcal{N}_2(\varepsilon)\, e^{-\varepsilon/kT} = \widetilde{\mathcal{N}}\, e^{\mu/kT} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT}$$

$$x = \frac{\varepsilon}{kT} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{V} = \widetilde{\mathcal{N}} e^{\mu/kT}\, kT \underbrace{\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x}}_{=1} \quad \Rightarrow \quad e^{\mu/kT} = \frac{N}{V} \frac{1}{\widetilde{\mathcal{N}}} \frac{1}{kT} = \frac{E_F}{kT}$$

$\boxed{\textbf{2}\text{ Punkte}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu(T) = kT\, \ln(E_F/kT)}$$

c) Klassischer Grenzfall $\leftrightarrow$ klassisches ideales Gas mit $f = 2$ Freiheitsgraden (2 Dimensionen), also $\boxed{U = \dfrac{f}{2} NkT = NkT}$ $\boxed{\textbf{1}\text{ Punkt}}$

Rechnung:

$$f(\varepsilon - \mu) \simeq e^{\mu/kT}\, e^{-\varepsilon/kT} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{V} = \widetilde{\mathcal{N}}\, e^{\mu/kT} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, \varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT} = \widetilde{\mathcal{N}}\, e^{\mu/kT}\, (kT)^2 \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, e^{-x}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, e^{-x} = [\, -e^{-x}\, x\,]\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, (-e^{-x}) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x} = 1$$

Einsetzen von $e^{\mu/kT}$ von oben liefert

$$\frac{U}{V} = \frac{N}{V}\, kT \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = N\, kT}$$

$\boxed{\textbf{2}\text{ Punkte}}$

$\boxed{\Sigma = \textbf{8}\text{ Punkte}}$

$\boxed{3}$ a) Ansatz einsetzen und Terme bis $\sim \delta m$ mitnehmen:

$$\begin{aligned}
F[T,m] &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\,[\,\frac{t}{2}(\tilde m+\delta m)^2+\frac{\gamma}{2}(\tilde m'+(\delta m)')^2\,] \\
&= F[T,\tilde m]+\int_0^\infty \mathrm{d}x\,[\,t\tilde m(\delta m)+\gamma\tilde m'(\delta m)'\,]+\sim(\delta m)^2 \quad ; \\
\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\tilde m'\,(\delta m)' &= \underbrace{\delta m\,\tilde m'|_0^\infty}_{=0}-\int_0^\infty \mathrm{d}x\,(\delta m)\,\tilde m'' \\
\Rightarrow\quad F[T,m] &= F[t,\tilde m]+\delta F \quad , \quad \delta F=\int_0^\infty \mathrm{d}x\,[\,t\tilde m-\gamma\tilde m''\,]\,\delta m
\end{aligned}$$

Nullsetzen der Variation:

$$\delta F=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\partial_x^2\tilde m(x)-\frac{t}{\gamma}\tilde m(x)=0}$$

3 Punkte

Alternativ: Euler–Lagrange-Gl. richtig anwenden:

$$\text{Mechanik:}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}=0 \qquad \text{hier:}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde m'}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde m}=0$$

$$\text{mit}\qquad \mathcal{L}(\tilde m,\tilde m')=\frac{t}{2}\tilde m^2+\frac{\gamma}{2}(\tilde m')^2$$

das Resultat ist natürlich dasselbe wie oben.

b) Ansatz:

$$\tilde m(x)=e^{\lambda x}\quad ,\quad \lambda^2-\frac{t}{\gamma}=0\quad ,\quad \boxed{\lambda=\pm\sqrt{t/\gamma}}$$

allgemeine Lösung: $\tilde m(x)=A\exp(\sqrt{\frac{t}{\gamma}}\,x)+B\exp(-\sqrt{\frac{t}{\gamma}}\,x)\,.$

Randbedingungen:

$$\tilde m(0)=m_0\quad ,\quad \tilde m(\infty)=0\quad\Rightarrow\quad A=0\quad ,\quad B=m_0\quad\Rightarrow\quad \boxed{\tilde m(x)=m_0\,\exp(-\sqrt{t/\gamma}\,x)}$$

2 Punkte

$\Sigma=$ **5** Punkte

$\boxed{4}$ **a)** Reiner Zustand: $\widehat{W}$ ist ein Projektor: $\widehat{W}^2 = \widehat{W}$.

Also:

$$\widehat{W}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \widehat{W}$$

also: reiner Zustand. **2** Punkte

b) Als Basis nehmen wir natürlich die Eigenbasis von $\widehat{W}$, sonst wird es schwierig mit dem $\ln()$: Angenommen, wir kennen die Eigenbasis $\widehat{W}|n\rangle = w_n|n\rangle$, dann ist

$$S = -k\sum_n \langle n|\widehat{W}\,\ln(\widehat{W})|n\rangle = -k\sum_n w_n \ln(w_n)\,\langle n|n\rangle = -k\sum_n w_n \ln(w_n)$$

1 Punkt

Also brauchen wir nur die Eigenwerte berechnen:

$$\det(\widehat{W} - \lambda\hat{1}) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0$$

Also ist $\lambda = 0\,,\ 1\,.$ (Dies gilt für jeden Projektor.)

Damit folgt $\boxed{S = -k[\,0\,\ln(0) + 1\,\ln(1)\,] = 0}$ **1** Punkt

Erwartung: reiner Zustand hat immer $S = 0$ **1** Punkt

(Denn ein reiner Zustand enthält keine Unwissenheit über den Zustand des Systems.)

$\Sigma =$ **5** Punkte

$\boxed{5}$ **a)** Die Zustandssumme faktorisiert,

$$Z = (Z_1)^N \quad , \quad Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(E_0/kT)n}$$

$$Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \quad , \quad x = \exp(-\frac{E_0}{kT})$$

$\boxed{\textbf{2} \text{ Punkte}}$

b) $\langle N_\alpha \rangle = N\, p_\alpha\,, \quad p_\alpha =$Wahrscheinlichkeit, einen Dot im Zustand $n = \alpha$ vorzufinden; also:

$$p_\alpha = \frac{1}{Z_1} e^{-E(\alpha)/kT} \quad , \quad \boxed{\langle N_\alpha \rangle = N \frac{x^\alpha}{Z_1} = N\, x^{\alpha-1}\,(1-x)}$$

$\boxed{\textbf{2} \text{ Punkte}}$

$$T \to \infty : \quad x \to 1 \quad \Rightarrow \quad \langle N_\alpha \rangle \to 0$$

$$T \to 0 : \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \langle N_\alpha \rangle \to N\, x^{\alpha-1}\Big|_{x\to 0} = N\, \delta_{\alpha,1}$$

$\boxed{\textbf{2} \text{ Punkte}}$

Interpretation:

$T \to \infty$: Alle Zustände sind gleich wahrscheinlich; da es unendlich viele Zustände gibt, geht die (normierte) Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Zustand gegen 0.

$T \to 0$: Nur noch der Grundzustand $n = 1$ des Dots ist wahrscheinlich, also mit Wahrscheinlichkeit 1.

$\boxed{\Sigma = \textbf{6} \text{ Punkte}}$