

1	2	3	4	5	6	Σ
3/3	2	3/5	4.5	6	6	24.5

1. Klausur Theorie F: Universität Karlsruhe

Statistische Physik
SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Do. Dr. Matthias Eschrig

Rückgabe: Dienstag, 27.06.2006 in den Übungen

Einziges Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes DinA4-Blatt.

25 Punkte + 3 Zusatzpunkte

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Thermodynamik:

Das Differential der freien Energie $F(T, M)$ eines homogenen Magneten mit magnetischem Moment M in einem parallelen äußeren Magnetfeld H ist gegeben durch $dF = -S dT + H dM$.

- ✓ a) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch, um ein neues thermodynamisches Potential $\bar{F}(T, H)$ zu erhalten. Wie lautet dessen vollständiges Differential? (2 Punkte)
- ✓ b) Leiten Sie für $d\bar{F}(T, H)$ die entsprechende Maxwell-Relation her. (1 Punkt)

(2 Punkte+1 Zusatzpunkt)

Aufgabe 2

Dichtematrix:

- ✓ a) Ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem Magnetfeld befinde sich im Quantenzustand $u|\uparrow\rangle + v|\downarrow\rangle$ (u, v komplex, $|u|^2 + |v|^2 = 1$). Schreiben Sie in der Basis $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ die Dichtematrix (in Matrixschreibweise) auf. Zeigen Sie, dass es sich um einen reinen Zustand handelt. (2 Punkte)
- ✓ b) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Entropie eines reinen Zustands verschwindet. (1 Zusatzpunkt)

(5 Punkte)

Aufgabe 3

Langevin-Gleichung:

Wir betrachten ein System von überdämpften getriebenen harmonischen Oszillatoren, wobei die Kraft $\xi(t)$ stochastisch und Gauß-verteilt ist: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2m\gamma k_B T \delta(t - t')$. Die Langevin-Gleichung für dieses System lautet: $m\gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = \xi(t)$.

- a) Bestimmen Sie mittels der Greenschen Funktion

$$G(t, t') = \frac{1}{m\gamma} \theta(t - t') e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t - t')}$$

den stochastischen Mittelwert $\langle x(t)^2 \rangle$. (4 Punkte)

- b) Berechnen Sie die mittlere potentielle Energie. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1 Punkt)

(5 Punkte)

Aufgabe 4

Mastergleichung:

Wir betrachten ein Teilchen, das zwischen drei Gitterplätzen $x = (0, \pm a)$ jeweils um einen Gitterplatz hüpfen kann, und zwar (falls ein Gitterplatz dort vorhanden ist) mit der Rate α nach rechts bzw. mit der Rate β nach links. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t am Ursprung zu finden sei $\rho_0(t)$, die Wahrscheinlichkeit es am Gitterplatz $+a$ $[-a]$ zu finden sei $\rho_+(t)$ $[\rho_-(t)]$. Offensichtlich gilt $\rho_0(t) + \rho_+(t) + \rho_-(t) = 1$ zu allen Zeiten.

- ✓ a) Stellen Sie die drei Mastergleichungen für die Wahrscheinlichkeiten $\rho_0(t)$, $\rho_+(t)$ und $\rho_-(t)$ auf. (2 Punkte)
- ✓ b) Finden Sie die stationäre Lösung. (1 Punkt)
- ✓ c) Bestimmen Sie für die stationäre Lösung die mittlere Position des Teilchens $\langle x \rangle$ und die mittlere quadratische Abweichung $\langle x^2 \rangle$. (1 Punkt)

- ✓ d) Lösen Sie die Mastergleichung für $\rho_0(t)$ mit der Anfangsbedingung $\rho_0(0) = 1$ (Teilchen am Ursprung) für den Fall, dass $\alpha = \beta$ ist. (1 Punkt)

Aufgabe 5

(5 Punkte und 1 Zusatzpunkt)

Statistik von Polymeren-mikrokanonisch:

Ein idealisiertes Modell für ein Polymer betrachtet letzteres als eine lineare Kette von N Gliedern, von denen jedes in zwei voneinander verschiedenen strukturellen Variationen ('Stereoisomeren'), V und I , vorkommen kann. Abhängig davon, welches der beiden Variationen V , I vorliegt, habe ein Glied die Länge l_V (l_I) und Energie ϵ_V (ϵ_I).

- ✓ a) Finden Sie die Energie E und Entropie S eines Polymers mit n_V Gliedern im strukturellen Zustand V als Funktionen von N , n_V , ϵ_V und ϵ_I . (Benutzen Sie die übliche Näherung $n! = (n/e)^n$ für N , n_V und n_I .) (3 Punkte)
- ✓ b) Eliminieren Sie n_V in dem Ausdruck für S und leiten Sie daraus die Entropie S als Funktion von seiner natürlichen Variablen her. [Hinweis: ϵ_V und ϵ_I sind feste Parameter im resultierenden Ausdruck.] (1 Punkt)
- ✓ c) Bestimmen Sie die Temperatur. Leiten Sie daraus die Temperaturabhängigkeit von E ab. (1 Punkt)
- ✓ d) Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie die mittlere Länge des Polymers als Funktion der Temperatur und der Parameter l_I , l_V , ϵ_I , ϵ_V , N . (1 Zusatzpunkt)

Aufgabe 6

(5 Punkte und 1 Zusatzpunkt)

Paramagnet-kanonisch:

Als Modell für einen Paramagneten betrachten wir ein System von N nichtwechselwirkenden Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem äußeren magnetischen Feld $\vec{H}$. Jedes Teilchen befindet sich entweder im Zustand Spin- $\uparrow$ oder im Zustand Spin- $\downarrow$. Die Energie des j^{ten} Teilchens ist gegeben durch $E_j = -\mu_B H \sigma_j$. Hierbei ist $H = |\vec{H}|$, und $\sigma_j = \pm 1$ unterscheidet den Spin- $\uparrow$ - bzw. Spin- $\downarrow$ -Zustand eines Teilchens.

- ✓ a) Bestimmen Sie die Zustandssumme Z_N des N -Teilchensystems. Wie läßt sich diese durch die Zustandssumme Z_1 eines einzelnen Teilchens ausdrücken? (1 Punkt)
- ✓ b) Berechnen Sie aus Z_N die freie Energie F des Paramagneten. (0.5 Punkte)
- ✓ c) Zeigen Sie, daß die innere Energie mit der Zustandssumme über $U = -\partial_\beta \ln Z_N$ mit $\beta = 1/(kT)$ zusammenhängt und berechnen Sie damit U des Paramagneten. (1 Punkt)
- ✓ d) Leiten Sie aus F und U dessen Entropie ab und diskutieren Sie diese in den Grenzfällen $T \rightarrow 0$ bzw. $T \rightarrow \infty$. Welche Mikrozustände (d.h. Spinkonfigurationen) des Systems werden im jeweiligen Grenzfall realisiert? (1.5 Punkte)
- ✓ e) Berechnen Sie desweiteren die Magnetisierung $M = \mu_B \langle N_\uparrow - N_\downarrow \rangle$. (Hier sind $N_{\uparrow, \downarrow}$ die Zahl der Teilchen, die sich im Spin- $\uparrow, \downarrow$ -Zustand befinden.) (1 Punkt)
- ✓ f) Zusatzaufgabe: Leiten Sie die thermische Zustandsgleichung $M = M(N, H, T)$ im Grenzfall hoher Temperaturen ab. Wie lautet die für alle Temperaturen gültige kalorische Zustandsgleichung $U = U(M, H)$? Interpretieren Sie letztere physikalisch. (1 Zusatzpunkt)