

Klausur zur Vorlesung Theorie F

SS 2007

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Tutor oder Übungsgr.:	
Semester:			

Wichtige Hinweise:

- Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.
- Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.
- Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.
- Dieses Deckblatt mit abgeben.
- Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgerät.
- Handy ausschalten !!

*** Formelsammlungen, Skripte, Rechner jeder Art sind NICHT zugelassen ***

Rückgabe von Klausur und Scheinen: siehe Aushang im Physikhochhaus und WWW.

Die Aufgaben werden mit einem gesonderten Blatt ausgeteilt !

Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Summe	Übung	Schein
1		4		7		10				
2		5		8		11		von 25	von 72	
3		6		9						

- Die einzelnen Aufgaben sind voneinander unabhängig und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.
- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt Schreibpapier verwenden !**

1 Für ein System mit Magnetisierung M im Magnetfeld B lautet der 1. Hauptsatz
 $dU = T dS - p dV + \mu dN - B dM$.

- a) [1 Pkt] Wie können p , μ , B aus U berechnet werden?
 b) [1 Pkt] Wie können p , μ , B aus S berechnet werden?

2 Was ist die Aussage des

- a) [1 Pkt] **2. Hauptsatzes** der Thermodynamik?
 b) [1 Pkt] **3. Hauptsatzes** der Thermodynamik?

3 In einem Behälter mit Volumen V befinden sich N Teilchen eines idealen Gases. Der wärmedurchlässige Behälter ist von einem Wärmebad der Temperatur T umgeben. In einer quasistatischen Zustandsänderung wird das Volumen des Behälters von V nach V' vergrößert.

[2 Pkte] Berechnen Sie die dabei vom Gas aufgenommene Wärmemenge ΔQ .

4 Die Zustandsdichte für ein freies Teilchen in der x - y -Ebene ist definiert als

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right).$$

[2 Pkte] Berechnen Sie $\mathcal{N}(\varepsilon)$.

5 Wir betrachten einen Quantenpunkt im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T . Der Quantenpunkt besitzt zwei entartete Eigenenergien E_0 und $E_1 = (E_0 + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, der Entartungsgrad dieser Niveaus beträgt α_0 bzw. α_1 .

- a) [1 Pkt] Man berechne über die freie Energie $F(T) = -k_B T \ln(Z_K)$ die Entropie für $T = 0$:
 $S_0 = \lim_{T \rightarrow 0} S(T)$, $S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T}$.
 b) [1 Pkt] Man berechne die Entropie für $T \rightarrow \infty$: $S_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} S(T)$.
 c) [1 Pkt] Wie können die Resultate für S aus a) und b) über die statistische Definition der Entropie interpretiert werden?

6 N Elektronen mit Spin 1/2 befinden sich in einem Kristall mit Volumen V bei einer Temperatur T . In der großkanonischen Gesamtheit ist die Teilchendichte $n = N/V$ gegeben durch

$$n(T, \mu) = 2 \int_0^\infty d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) f(\varepsilon - \mu), \quad f = \text{Fermi-Funktion}.$$

Die Dispersion der Elektronen in dem Kristall ist nicht bekannt, wohl aber die Fermi-Energie ε_F und die Zustandsdichte $\mathcal{N}(\varepsilon)$ mit $\mathcal{N}(\varepsilon = 0) = 0$.

[2 Pkte] Man berechne für $T \rightarrow 0$ die Kompressibilität

$$\kappa_0 = \lim_{T \rightarrow 0} \kappa(T) \quad \text{mit} \quad \kappa(T) = A \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T, \quad A = \text{const.}$$

Bitte wenden $\implies \implies$

- 7** N freie Bosonen befinden sich in einem zweidimensionalen "Volumen" $V = L^2$ bei einer Temperatur T . Das chemische Potential läßt sich berechnen, mit dem Ergebnis

$$\mu(T) = -k_B T \exp\left(-\frac{2\pi\hbar^2 N}{m L^2 k_B T}\right).$$

[1 Pkt] Tritt in diesem System Bose-Kondensation auf? Wenn ja, bei welcher Temperatur T_0 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- 8** Ein Gas aus N freien fermionischen Punktteilchen der Masse m , die einen Spin $1/2$ besitzen, befinden sich in einer eindimensionalen Kavität der Länge L auf der x -Achse. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt. Es sei $T = 0$.

[2 Pkte] Berechnen Sie die Fermi-Energie $\varepsilon_F(n)$, $n = N/L$. (Hinweis: $\sum_k = \frac{L}{2\pi} \int dk$)

- 9** In der großkanonischen Gesamtheit lautet der statistische Operator $\hat{W}_G = \frac{1}{Z_G} e^{-(\hat{H} - \mu\hat{N})/k_B T}$ mit $\text{Tr}[\hat{W}_G] = 1$, der thermische Mittelwert eines Operators $\hat{A}$ ist definiert als $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{W}_G \hat{A}]$, und die Definition der Entropie lautet $S = -k_B \text{Tr}[\hat{W}_G \ln(\hat{W}_G)]$.

[2 Pkte] Man zeige, daß das großkanonische Potential $\Omega = U - TS - \mu N$ durch $\Omega = -k_B T \ln(Z_G)$ gegeben ist, wenn U die innere Energie und N die mittlere Teilchenzahl bezeichnen.

- 10** Das Landau-Funktional für einen Ferromagneten mit Übergangstemperatur T_c , an den ein externes Magnetfeld h angelegt wird, lautet

$$F(T, m, h) = \left[\frac{1}{2} \frac{T - T_c}{T_c} m^2 + \frac{1}{4} b m^4 - h m \right], \quad T_c, b > 0.$$

- a) [2 Pkte] Welche Magnetisierung $m_0(T)$ stellt sich für $T > T_c$ bzw. $T < T_c$ im Gleichgewicht ein, wenn $h = 0$? Bestimmen Sie jeweils auch die freie Energie $F(T)$.
- b) [2 Pkt] Welche Magnetisierung $m(T, h)$ stellt sich für $T > T_c$ im Gleichgewicht ein, wenn ein *kleines* Feld $h > 0$ anliegt? Hinweis: Ansatz $m(T, h) = m_0(T) + \Delta m$ mit $\Delta m \simeq 0$.

- 11** In einem Behälter befindet sich eine große Menge Gas (Teilchenreservoir) mit Temperatur T und chemischem Potential μ . Die Wand des Behälters weist insgesamt R Plätze auf, an denen jeweils höchstens ein Gasmolekül gebunden werden kann. Ein Molekül, das an der Wand gebunden (adsorbiert) wird, wird dem Teilchenreservoir entzogen und gewinnt die Bindungsenergie $-I$ mit $I > 0$.

[3 Pkte] Geben Sie die Mikrozustände für das System der an der Wand gebundenen Moleküle an, und berechnen Sie damit die großkanonische Zustandssumme $Z_G(T, \mu)$ und die mittlere Zahl $N(T, \mu)$ gebundener Moleküle.