

1 a) dU ist offenbar ein totales Differential, also:

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N,M}, \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V,M}, \quad B = - \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{S,V,N}$$

1 Punkt

(Die Subscripts S, N, M etc. dürfen auch weggelassen werden.)

1 b)

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN + \frac{B}{T} dM$$

$$\Rightarrow p = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N,M}, \quad \mu = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V,M}, \quad B = T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_{U,V,N}$$

1 Punkt

(Die Subscripts U, N, M etc. dürfen auch weggelassen werden.)

2 a) 2. Hauptsatz: Es gibt (mindestens) 4 äquivalente und damit gleichermaßen richtige Antworten: Historische (rein phänomenologische) Formulierungen:

- (1) Es gibt keine thermodynamische Zustandsänderung, deren *einzig*e Wirkung darin besteht, eine Wärmemenge einem Wärmespeicher zu entziehen und *vollständig* in Arbeit umzusetzen.
- (2) Es gibt keine thermodynamische Zustandsänderung, deren *einzig*e Wirkung darin besteht, eine Wärmemenge einem Wärmespeicher zu entziehen und an einen *wärmeren* Speicher abzugeben.

Daraus wird dann (über Carnot etc.) abgeleitet:

- (3) Es gibt eine thermodynamische Zustandsgröße S ("Entropie") mit der Eigenschaft, daß in einem *abgeschlossenen* System für jede thermodynamische Zustandsänderung gilt: $\Delta S \geq 0$.

Für nicht abgeschlossene Systeme lautet das:

- (4) Es gibt eine thermodynamische Zustandsgröße S ("Entropie") mit der Eigenschaft, daß in einem System, das *an ein Wärmebad angekoppelt* ist, für jede thermodynamische Zustandsänderung gilt: $\Delta S \geq \frac{\delta Q}{T}$, wobei δQ die aufgenommene Wärmemenge ist.

1 Punkt

(Die *hervorgehobenen* "Keywords" sollten (wenigstens sinngemäß) genannt werden!)

2 b) 3. Hauptsatz:

Für $T \rightarrow 0$ geht die Entropie gegen eine *Konstante*, $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = S_0 = \text{const.}$

1 Punkt

(Es ist auch in Ordnung, direkt $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$ zu behaupten.)

3 Ideales Gas: $U = \frac{f}{2}NkT$, $pV = NkT$.

Zustandsänderung: $V \rightarrow V' \Rightarrow dV > 0$, $dT = 0$, $dN = 0 \Rightarrow dU = 0$.

Der 1. Hauptsatz lautet damit

$$0 = dU = \delta Q - pdV \Rightarrow \delta Q = pdV$$

Mit $pV = \text{const.} = NkT$ folgt

$$\Rightarrow p = \frac{NkT}{V} \Rightarrow \delta Q = \frac{NkT}{V}dV \Rightarrow \Delta Q = NkT \int_V^{V'} \frac{1}{V}dV = NkT \ln(V'/V)$$

2 Punkte

4 Zustandsdichte:

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

Polarkoordinaten:

$$d^2k = kdkd\varphi, \quad 0 \leq k < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{4\pi^2} \int_0^\infty kdk \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right), \quad u = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow du = \frac{\hbar^2}{m}kdk$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty du \delta(\varepsilon - u) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \Theta(\varepsilon)$$

2 Punkte

(Wenn das $\Theta(\varepsilon)$ vergessen wird, ist das o.k.)

5 a) Wärmebad \Rightarrow kanonische Gesamtheit:

$$Z_K(T) = \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}} = \alpha_0 e^{-\beta E_0} + \alpha_1 e^{-\beta(E_0 + \varepsilon)}$$

$$\boxed{T \rightarrow 0:} \quad \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad Z_K \simeq \alpha_0 e^{-\beta E_0} \quad \Rightarrow \quad F(T) \simeq -kT \ln(\alpha_0 e^{-\beta E_0}) = -kT \ln(\alpha_0) + E_0$$

$$\Rightarrow \quad S_0 = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{T=0} = k \ln(\alpha_0)$$

1 Punkt

5 b)

$$\boxed{T \rightarrow \infty:} \quad \beta E_0 \simeq 0, \quad \beta(E_0 + \varepsilon) \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad Z_K \simeq (\alpha_0 + \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \quad F(T) \simeq -kT \ln(\alpha_0 + \alpha_1) \quad \Rightarrow \quad S_{\infty} = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{T \rightarrow \infty} = k \ln(\alpha_0 + \alpha_1)$$

1 Punkt

5 c) Definition der Entropie: Mit der normierten Wahrscheinlichkeit w_{α} , das System im Mikrozustand α anzutreffen,

$$S = -k \sum_{\alpha} w_{\alpha} \ln(w_{\alpha}), \quad \text{für } w_{\alpha} = w \quad \text{folgt } S = -k \ln(w) = k \ln(\Omega)$$

Wenn alle Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, folgt der bekannte mikrokanonische Ausdruck für S . Dieser ist offenbar geeignet, die Ergebnisse aus **a)** und **b)** zu interpretieren:

(Es ist natürlich in Ordnung, direkt von $S = k \ln(\Omega)$ zu starten.)

$T = 0$ Nur noch der Grundzustand kommt als Mikrozustand in Frage, d.h., es gibt α_0 Mikrozustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit, die zur Entropie beitragen.

$T \rightarrow \infty$ Nun sind alle möglichen Mikrozustände praktisch entartet und gleich wahrscheinlich, und das sind $\alpha_0 + \alpha_1$ Stück.

1 Punkt

6 An einfachsten ist es, den Limes $T \rightarrow 0$ zuerst zu machen:

$$T \rightarrow 0 : \quad \mu \rightarrow \varepsilon_F, \quad f(\varepsilon - \mu) \rightarrow \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad n(T, \mu) \rightarrow n(0, \varepsilon_F) = 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon)$$

und damit folgt

$$\kappa_0 = A \left. \frac{\partial n}{\partial \varepsilon_F} \right|_{T=0} = A 2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_F} \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) = A 2 \mathcal{N}(\varepsilon_F)$$

2 Punkte

Alternativ kann man den Limes $T \rightarrow 0$ erst am Schluß vornehmen:

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= A \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T = A 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \mu} f(\varepsilon - \mu) = -A 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon - \mu) \\ &= -A 2 \left[f(\varepsilon - \mu) \mathcal{N}(\varepsilon) \right]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty} - \int_0^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon - \mu) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{N}(\varepsilon) \\ \Rightarrow \quad \kappa(T) &= A 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon - \mu) \mathcal{N}'(\varepsilon) \end{aligned}$$

Jetzt $T \rightarrow 0$:

$$\kappa_0 = A 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \mathcal{N}'(\varepsilon) = A 2 [\mathcal{N}(\varepsilon_F) - \mathcal{N}(0)] = A 2 \mathcal{N}(\varepsilon_F)$$

7 Offenbar ist für hohe Temperaturen $\mu(T) < 0$, wie es sein muß. Eine Kondensation bei einer tieferen Temperatur T_0 wird angezeigt durch das chemische Potential, das bei T_0 null wird. $\mu(T)$ wird hier auch null, allerdings erst bei $T = 0$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) = 0, \quad \mu(T)|_{T>0} < 0$$

Es gibt also 2 richtige Antworten:

- (1) Die Bosonen kondensieren gar nicht, denn für jede (auch nur infinitesimale) Temperatur $T > 0$ bleibt $\mu(T) < 0$.
- (2) Die Bosonen kondensieren, aber erst am absoluten Temperatur-Nullpunkt, d.h., $T_0 = 0$.

1 Punkt

8 Mit Spin gilt für die Teilchenzahl:

$$N = 2 \sum_k \Theta(k_F - k) = 2 \sum_{k=-k_F}^{k_F} = 2 \frac{L}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} dk = \frac{L}{\pi} 2k_F$$

Die Fermi-Energie ergibt sich daraus,

$$n = \frac{N}{L} = \frac{2k_F}{\pi} \Rightarrow k_F = \frac{\pi}{2}n \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} n^2$$

2 Punkte

9 Mittelwerte: Innere Energie und Teilchenzahl:

$$U = \langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}[\hat{W}_G \hat{H}] \quad , \quad N = \langle \hat{N} \rangle = \text{Tr}[\hat{W}_G \hat{N}]$$

Potential:

$$\Omega = (U - \mu N) - TS = \text{Tr}[\hat{W}_G (\hat{H} - \mu \hat{N})] + kT \text{Tr}[\hat{W}_G \ln(\hat{W}_G)]$$

Wir können uns jetzt die Tr in Eigenzuständen von \hat{W}_G ausgeschrieben denken, dann folgt

$$\ln(\hat{W}_G) = -\frac{1}{kT}(\hat{H} - \mu \hat{N}) - \ln(Z_G)$$

und damit

$$\Rightarrow \Omega = -kT \text{Tr}[\hat{W}_G \ln(Z_G)] = -kT \ln(Z_G) \text{Tr}[\hat{W}_G] = -kT \ln(Z_G)$$

2 Punkte

10 a) Gleichgewicht:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial m} \right|_{m_0} = 0 \Rightarrow h = 0 : \frac{T - T_c}{T_c} m_0 + b m_0^3 = 0$$

$$\Rightarrow m_0 = 0 \quad \text{für alle } T$$

und

$$m_0 = \pm \left(\frac{T_c - T}{b T_c} \right)^{1/2} \quad \text{für } T < T_c$$

Um zu entscheiden, welche der beiden Lösungen für $T < T_c$ zu einem Minimum von F gehört, wird F am Gleichgewichtspunkt $m = m_0$ bestimmt; der Minimalwert von F ist dann auch die thermodynamische freie Energie $F(T)$:

$$m_0 = 0 : F(T) = 0$$

$$(m_0)^2 = \frac{T_c - T}{b T_c} : F(T) = \frac{1}{2} \frac{T - T_c}{T_c} \frac{T_c - T}{b T_c} + \frac{1}{4} b \left(\frac{T_c - T}{b T_c} \right)^2 = -\frac{1}{4b} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^2$$

Für $T < T_c$ liefert also $m_0 \neq 0$ die kleinere freie Energie, d.h., der Ordnungsparameter $m_0(T)$ wird unterhalb T_c endlich. **2 Punkte**

(Die Argumentation mit der kleineren freien Energie bei endlichem m_0 für $T < T_c$ muß vorhanden sein, sonst Punktabzug!)

10 b)

$$h \neq 0 : \frac{\partial F}{\partial m} = 0 = \frac{T - T_c}{T_c} m + b m^3 - h$$

Ansatz

$$m = m_0 + \Delta m, \quad T > T_c : m_0 = 0 \Rightarrow m = \Delta m \simeq 0$$

Also nur die führenden Potenzen von $m = \Delta m$ mitnehmen:

$$\Rightarrow 0 = \frac{T - T_c}{T_c} \Delta m - h \Rightarrow \Delta m = \frac{h T_c}{T - T_c} \Rightarrow m(T) = h \frac{T_c}{T - T_c} \quad \text{2 Punkte}$$

(Curie-Weiss-Gesetz)

11 Mikrozustände:

$$\{\alpha\} = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_R\}, \quad n_i = 0, 1$$

mit den "Besetzungszahlen"

$$n_i = 0 \Leftrightarrow \text{der Platz } i \text{ an der Wand ist leer,}$$

1 Punkt

$$n_i = 1 \Leftrightarrow \text{der Platz } i \text{ an der Wand ist besetzt.}$$

$$\Rightarrow E_\alpha = \sum_{i=1}^R (-I)n_i, \quad N_\alpha = \sum_{i=1}^R n_i$$

$$\Rightarrow Z_G(T, \mu) = \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} = (Z_1)^R, \quad Z_1 = \sum_{n=0,1} e^{\beta(I+\mu)n} = 1 + e^{\beta(I+\mu)}$$

1 Punkt

Mittlere Teilchenzahl (der Moleküle an der Wand):

$$N(T, \mu) = \frac{1}{Z_G} \sum_{\alpha} N_\alpha e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial \beta \mu} \ln(Z_G) = R \frac{\partial}{\partial \beta \mu} \ln(Z_1) = R \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial \beta \mu}$$

$$\Rightarrow N(T, \mu) = R \frac{e^{\beta(I+\mu)}}{1 + e^{\beta(I+\mu)}} = R \frac{1}{1 + e^{-\beta(I+\mu)}}$$

1 Punkt

$\Sigma = 25$ Punkte