Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre
theorie-f@tkm.uni-karlsruhe.de

SS 2007

31.10.07

Nachklausur zur Vorlesung Theorie F SS 2007

Name:		**Vorname:**	
Matrikelnr.:		**Semester:**	

Wichtige Hinweise:

- **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**

- **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- **Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.**
- **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- **Dieses Deckblatt mit abgeben.**

- **Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgerät.**
- **Handy ausschalten !!**

***** Formelsammlungen, Skripte, Rechner jeder Art sind NICHT zugelassen *****

Rückgabe von Klausur und Scheinen: siehe Aushang im Physikhochhaus und WWW.

Die Aufgaben werden mit einem gesonderten Blatt ausgeteilt !

Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	**Summe**	**Übung**	**Schein**
1		4		7		10				
2		5		8				von **25**	von **72**	
3		6		9						

- **Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt Schreibpapier verwenden!**

$\boxed{1}$ Für ein System mit Polarisation P im elektrischen Feld E lautet der 1. Hauptsatz $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S \;-\; p\,\mathrm{d}V \;+\; \mu\,\mathrm{d}N \;-\; E\,\mathrm{d}P\,.$

a) [1 Pkt] Wie können $p\,,\ \mu\,,\ E$ aus U berechnet werden?

b) [1 Pkt] Wie können $p\,,\ \mu\,,\ E$ aus S berechnet werden?

$\boxed{2}$ [1 Pkt] Was versteht man unter einem statistischen Ensemble (oder gleichbedeutend: einer statistischen Gesamtheit)?

$\boxed{3}$ Ein ideales Gas aus N Teilchen befindet sich in einem Behälter mit variablem Volumen, z.B. einem Sack. Der wärmedurchlässige Sack befindet sich in der Atmosphäre mit Temperatur T und Druck p. Durch die globale Erwärmung wird die Atmosphäre auf $T' = T + \Delta T$ aufgeheizt (p bleibt unverändert).
[2 Pkte] Berechnen Sie die dabei vom Gas im Behälter aufgenommene Wärmemenge ΔQ.

$\boxed{4}$ Die Zustandsdichte eines freien Phonons in der x-y-Ebene ist definiert als

$$D(\omega) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2}\, \delta\big(\omega - c\,|\mathbf{k}|\big) \quad , \quad c = const. > 0\,.$$

[2 Pkte] Berechnen Sie $D(\omega)$.

$\boxed{5}$ Wir betrachten *drei* Quantenpunkte, die untereinander wechselwirken, im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Jeder Quantenpunkt kann zwei Zustände $\sigma = +1$ und $\sigma = -1$ einnehmen; ein Mikrozustand des Systems ist damit $\alpha = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,,\ \ \sigma_i \in \{+1, -1\}$. Die Energie des Mikrozustandes sei $E_\alpha = J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$ mit $J = const. > 0$.

a) [3 Pkte] Man bestimme die Entartungen und berechne über die freie Energie $F(T) = -k_B T \ln(Z_K)$ die Entropie für $T = 0$: $S_0 = \lim\limits_{T\to 0} S(T)\,,\ \ S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T}$.

b) [1 Pkt] Man berechne die Entropie für $T \to \infty$: $S_\infty = \lim\limits_{T\to\infty} S(T)$.

c) [1 Pkt] Wie können die Resultate für S aus **a)** und **b)** über die statistische Definition der Entropie interpretiert werden?

$\boxed{6}$ N Elektronen mit Spin 1/2 befinden sich in einer Kavität mit Volumen V bei einer Temperatur T. In der großkanonischen Gesamtheit lautet die Teilchendichte $n = N/V$,

$$n(T,\mu) = 2\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\, \mathcal{N}(\varepsilon)\, f(\varepsilon - \mu) \quad , \quad f = \text{Fermi-Funktion}\,.$$

Die Zustandsdichte der Elektronen sei gegeben durch

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \mathcal{N}_0\, \theta(\varepsilon) \quad , \quad \mathcal{N}_0 = const. > 0\,.$$

[2 Pkte] Man berechne für $T \to \infty$ die kanonische Kompressibilität

$$\kappa(T,n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T . \qquad \text{Es darf } -\mu/k_B T \gg 1 \text{ angenommen werden.}$$

Bitte wenden $\Longrightarrow \Longrightarrow$

$\boxed{7}$ N Bosonen befinden sich in einem Volumen V bei einer Temperatur T. Das chemische Potential μ wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} A(e^{\mu/k_BT}) \quad , \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m\,k_BT}} \quad , \quad A(0) = 0 \quad , \quad A(1) = 2.162\,.$$

$A(x)$ ist eine monoton steigende Funktion von x.

[**2** Pkte] Tritt in diesem System Bose-Kondensation auf? Wenn ja, bei welcher Temperatur T_0?

$\boxed{8}$ N freie fermionische Punktteilchen der Masse m, die einen Spin 1/2 besitzen, befinden sich in einer eindimensionalen Kavität der Länge L auf der x-Achse. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt. Es sei $T = 0$.

[**3** Pkte] Berechnen Sie die innere Energie $U(N, L)$ des Gases. (Hinweis: $\displaystyle\sum_k = \frac{L}{2\pi}\int \mathrm{d}k$)

$\boxed{9}$ In der magnetischen Gesamtheit lautet der statistische Operator $\hat{W}_M = \dfrac{1}{Z_M} e^{-(\hat{H}-B\hat{M})/k_BT}$ mit $\mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,] = 1$. B bezeichnet das äußere Magnetfeld, $\hat{M}$ den Operator des magnetischen Momentes. Der thermische Mittelwert eines Operators $\hat{A}$ ist definiert als $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\hat{A}\,]$, und die Definition der Entropie lautet $S = -k_B\mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\ln(\hat{W}_M)\,]$.

[**2** Pkte] Man zeige, daß das zugehörige Potential $G = U - T\,S - B\,M$ durch $G = -k_BT\,\ln(Z_M)$ gegeben ist, wenn U die innere Energie und M das mittlere magnetische Moment (Magnetisierung) bezeichnen.

$\boxed{10}$ Das Landau-Funktional für ein System mit zwei gekoppelten magnetischen Ordnungsparametern m_1 und m_2 im Magnetfeld h lautet

$$F(T, m_1, m_2, h) = \Big[\,\frac{1}{2}t(m_1^2 + m_2^2) \;+\; \frac{b}{4}(m_1^4 + m_2^4) \;+\; \frac{a}{2}(m_1 - m_2)^2 \;-\; h(m_1 + m_2)\,\Big]$$

mit $t = \frac{T-T_0}{T_0}$ und $T_0, a, b = const. > 0$.

a) [**1** Pkt] Man begründe, daß im thermischen Gleichgewicht gilt: $\dfrac{\partial}{\partial h}\dfrac{\partial F}{\partial m_l} = 0$, $l = 1, 2$.

b) [**3** Pkte] Man berechne die Suszeptibilitäten $\chi_1(T) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\partial m_1}{\partial h}$ und $\chi_2(T) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\partial m_2}{\partial h}$ im thermischen Gleichgewicht in der ungeordneten Phase, also für $\lim\limits_{h\to 0} m_l(T, h) = 0$.