$\boxed{1}$ **a)** $\mathrm{d}U$ ist offenbar ein totales Differential, also:

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N,P} \quad , \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V,P} \quad , \quad E = -\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{S,V,N}$$

1 Punkt

(Die Subscripts S, N, P etc. dürfen auch weggelassen werden.)

$\boxed{1}$ **b)**

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\,\mathrm{d}U \;+\; \frac{p}{T}\,\mathrm{d}V \;-\; \frac{\mu}{T}\,\mathrm{d}N \;+\; \frac{E}{T}\,\mathrm{d}P$$

$$\Rightarrow \quad p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N,P} \quad , \quad \mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V,P} \quad , \quad E = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{U,V,N}$$

1 Punkt

(Die Subscripts U, N, P etc. dürfen auch weggelassen werden.)

$\boxed{2}$ Eine statistische Gesamtheit ist eine Menge von $N_G \to \infty$ *identischen Kopien* des betrachteten Systems. Alle Kopien unterliegen den *gleichen Randbedingungen*.

1 Punkt

(Die *hervorgehobenen* “Keywords” sollten (wenigstens sinngemäß) genannt werden!)

[[Die Gesamtheit kann realisiert werden, indem man ein homogenes, makroskopisches System in N_G Untersysteme aufteilt.]]

$\boxed{3}$ Zustandsänderung:

$$N = const. \quad , \quad p = const. \quad , \quad V \to V' \quad , \quad T \to T' = T + \Delta T$$

Ideales Gas:

$$U = \frac{f}{2}NkT \quad , \quad pV = NkT \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{f}{2}Nk\,\Delta T \quad , \quad p\,\Delta V = Nk\,\Delta T$$

1. Hauptsatz:

$$\mathrm{d}U = \delta Q - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \Delta Q - p\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \Delta U + p\,\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad \Delta Q = \left(\frac{f}{2} + 1\right)Nk\,\Delta T$$

2 Punkte

(f darf von vorneherein als $f = 3$ angenommen werden.)

4 Polarkoordinaten:

$$d^2k = k\mathrm{d}k\mathrm{d}\varphi \quad , \quad 0 \le k < \infty \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\mathrm{d}k\,\delta(\omega - ck) \quad , \quad x = ck \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}k = \frac{1}{c}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad D(\omega) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_0^\infty x\mathrm{d}x\,\delta(\omega - x) = \frac{\omega}{2\pi c^2}\Theta(\omega)$$

2 Punkte

(Wenn das $\Theta(\omega)$ vergessen wird, ist das o.k.)

5 **a)** Wärmebad $\Rightarrow$ kanonische Gesamtheit.

Für die Zustandssumme Z_K brauchen wir die Energien und deren Entartungen:

σ_1	σ_2	σ_3	E_α
+	+	+	$3J$
+	+	−	
+	−	+	$-J$
−	+	+	
+	−	−	
−	+	−	$-J$
−	−	+	
−	−	−	$3J$

$\Longrightarrow$

Energie	Entartung
$3J$	2
$-J$	6

$$\Rightarrow \quad Z_K = \sum_\alpha e^{-\beta E_\alpha} = [\,2e^{-3\beta J} + 6e^{\beta J}\,]$$

$$\boxed{T \to 0:} \quad \beta \to \infty \quad \Rightarrow \quad Z_K \simeq 6e^{\beta J} \quad \Rightarrow \quad F(T) = -\frac{1}{\beta}\ln(Z_K) = -J - kT\ln(6)$$

$$\Rightarrow \quad S_0 = k\,\ln(6)$$

3 Punkte

5 **b)**

$$\boxed{T \to \infty:} \quad \beta \to 0 \quad \Rightarrow \quad Z_K \simeq \sum_\alpha 1 = (2)^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad F(T) = -kT\,\ln(8)$$

$$\Rightarrow \quad S_\infty = k\,\ln(8)$$

1 Punkt

$\boxed{5}$ **c)** Definition der Entropie: Mit der normierten Wahrscheinlichkeit w_α, das System im Mikrozustand α anzutreffen,

$$S = -k \sum_\alpha w_\alpha \ln(w_\alpha) \;, \qquad \text{für} \quad w_\alpha = w \quad \text{folgt} \quad S = -k\ln(w) = k\ln(\Omega)$$

Wenn alle Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, folgt der bekannte mikrokanonische Ausdruck für S. Dieser ist offenbar geeignet, die Ergebnisse aus **a)** und **b)** zu interpretieren:
(Es ist natürlich in Ordnung, direkt von $S = k\ln(\Omega)$ zu starten.)

$T = 0$ Nur noch der Grundzustand kommt als Mikrozustand in Frage, d.h., es gibt 6 Mikrozustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit, die zur Entropie beitragen.

$T \to \infty$ Nun sind alle möglichen Mikrozustände praktisch entartet und gleich wahrscheinlich, und das sind $(2)^3 = 8$ Stück.

1 Punkt

$\boxed{6}$ Teilchendichte:

$$n(T,\mu) = 2\mathcal{N}_0 \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

Mit der Annahme, und mit $\varepsilon > 0$,

$$-\beta\mu \gg 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta\mu} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad f(\varepsilon-\mu) \simeq e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$

$$\Rightarrow \quad n(T\mu) = 2\mathcal{N}_0 e^{\beta\mu} \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \, e^{-\beta\varepsilon} = \frac{2\mathcal{N}_0}{\beta} e^{\beta\mu}$$

Kompressibilität:

$$\kappa(T,\mu) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T = \frac{2\mathcal{N}_0}{n^2} e^{\beta\mu}$$

Das μ muß noch eliminiert werden:

$$2\mathcal{N}_0 e^{\beta\mu} = \beta\, n \quad \Rightarrow \quad \kappa(T,n) = \frac{1}{n}\frac{1}{kT}$$

2 Punkte

$\boxed{7}$ Falls bei einer endlichen Temperatur T_0 Kondensation einsetzt, sollte dort $\mu = 0$ werden:

$$T = T_0 : \quad \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\mu/kT} = 1 \quad \Rightarrow \quad A(e^{\mu/kT}) = A(1) = 2.612$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N}{V} = 2.612 \cdot \left(\frac{mkT_0}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad kT_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{(2.162)^{2/3} m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

2 Punkte

Offenbar gibt es eine endliche Kondensationstemperatur $T_0 > 0$.

8 Die innere Energie lautet

$$U = 2\sum_k \Theta(k_F - |k|)\,\varepsilon(k) = 2\sum_{k=-k_F}^{k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = 2\frac{L}{2\pi}\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-k_F}^{k_F} \mathrm{d}k\,k^2 = \frac{L\hbar^2}{3\pi m}(k_F)^3$$

Mit Spin gilt für die Teilchenzahl:

$$N = 2\sum_k \Theta(k_F - |k|) = 2\sum_{k=-k_F}^{k_F} = 2\frac{L}{2\pi}\int_{-k_F}^{k_F} \mathrm{d}k = \frac{L}{\pi}2k_F \quad \Rightarrow \quad k_F = \frac{\pi N}{2L}$$

damit k_F in U eliminieren:

$$\Rightarrow \quad U(N,L) = \frac{L\hbar^2}{3\pi m}\left(\frac{\pi N}{2L}\right)^3$$

3 Punkte

9 Mittelwerte: Innere Energie und Magnetisierung:

$$U = \langle \hat{H} \rangle = \mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\hat{H}\,] \;, \quad M = \langle \hat{M} \rangle = \mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\hat{M}\,]$$

Potential:

$$G = (U - B\,M) - T\,S = \mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,(\hat{H} - B\hat{M})\,] \; + \; kT\,\mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\ln(\hat{W}_M)\,]$$

Wir können uns jetzt die Tr in Eigenzuständen von $\hat{W}_M$ ausgeschrieben denken, dann folgt

$$\ln(\hat{W}_M) = -\frac{1}{kT}(\hat{H} - B\hat{M}) \; - \; \ln(Z_M)$$

und damit

$$\Rightarrow \quad G = -kT\,\mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,\ln(Z_M)\,] = -kT\ln(Z_M)\,\mathrm{Tr}[\,\hat{W}_M\,] = -kT\,\ln(Z_M)$$

2 Punkte

10 a) Im Gleichgewicht ist F stationär, d.h.,

$$\frac{\partial F}{\partial m_1} = \frac{\partial F}{\partial m_2} = 0$$

Damit ist

$$\frac{\partial}{\partial x} 0 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial m_l} = 0 \quad , \quad l = 1, 2$$

für eine beliebige Variable x.

1 Punkt

10 b) Im thermischen Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial m_1} &= 0 = [\, t m_1 + b m_1^3 + a(m_1 - m_2) - h\,] \\ \frac{\partial F}{\partial m_2} &= 0 = [\, t m_2 + b m_2^3 + a(m_2 - m_1) - h\,] \end{aligned}$$

Jetzt Verwenden von $\dfrac{\partial}{\partial h}\dfrac{\partial F}{\partial m_l} = 0$ mit der Abkürzung $\chi_l = \dfrac{\partial m_l}{\partial h}$,

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= [\, t\chi_1 + 3 b m_1^2 \chi_1 + a(\chi_1 - \chi_2) - 1\,] \\ 0 &= [\, t\chi_2 + 3 b m_2^2 \chi_2 + a(\chi_2 - \chi_1) - 1\,] \end{aligned}$$

Im Limes $h \to 0$ gilt schließlich $m_l^2 = 0$, also

$$\begin{aligned} 1 &= (t+a)\chi_1 - a\chi_2 \\ 1 &= (t+a)\chi_2 - a\chi_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Summe:}\quad 2 &= t(\chi_1 + \chi_2) \\ \text{Diff.:}\quad 0 &= (t+2a)(\chi_1 - \chi_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \chi_1(T) = \chi_2(T) = \frac{1}{t} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

3 Punkte

$\Sigma =$ **25** Punkte