KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE — INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Moderne Theoretische Physik III (Theorie F, Statistische Physik)
Abschlussklausur: Sommersemester 2012

Prof. Dr. Jörg Schmalian — **50 Punkte + 10 Bonuspunkte; 120 Minuten**

Dr. Igor Gornyi — **Di. 24.07.2012, 17:30-19:30, Gerthsen HS**

---

1. Quickies: **(20 Punkte)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen so kurz wie möglich.

(a) **(1 Punkt)** Was besagt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik?

(b) **(2 Punkte)** Die innere Energie eines Systems lautet $U = U_0 + \alpha T^3$. Bestimmen Sie die Entropie und die Wärmekapazität des Systems.

(c) **(1 Punkt)** Wie lautet die mittlere innere Energie des klassischen, ultra-relativistischen idealen Gases in drei Dimensionen als Funktion der Temperatur, der Teilchenzahl und des Volumens.

(d) **(1 Punkt)** Geben Sie den Ausdruck für die Wärmekapazität von Photonen in 3 Dimensionen in Abhängigkeit von der Temperatur an.

(e) **(2 Punkte)** Skizzieren Sie die Zustandsdichte für ein freies Elektronengas für $d = 1, 2, 3$. Drücken Sie die Teilchenzahl eines idealen Fermigases bei $T = 0$ über die Zustandsdichte aus.

(f) **(3 Punkte)** Skizzieren Sie die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial E}$ der Fermi-Verteilung in Abhängigkeit der Energie E. Was ist die Fermi-Energie? Kann das chemische Potential μ von Fermionen mit der Einteilchen-Energie $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ bei endlicher Teilchenzahl negativ sein?

(g) **(3 Punkte)** Was gilt für die Fermi/Bose-Verteilung für $T \to \infty$? Welche Bedingung muss an μ gestellt werden, damit die mittlere Teilchenzahl endlich bleibt? Welche Gestalt nimmt die Fermi/Bose-Funktion dann an?

(h) **(2 Punkte)** Nennen Sie mindestens zwei Beispiele für physikalische Größen in der Nähe eines Phasenübergangs, die durch die kritischen Exponenten charakterisiert sind.

(i) **(3 Punkte)** Skizzieren Sie die freie Energie, die Entropie und die spezifische Wärmekapazität eines Systems, das einen Phasenübergang erster Ordnung durchläuft, als Funktion der Temperatur.

(j) **(2 Punkte)** Geben Sie eine grobe Abschätzung für die Übergangstemperatur des ein- und zweidimensionalen Ising-Modells

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \qquad (1)$$

an, wobei die Summe über alle benachbarten Gitterplätze geht, $S_i = \pm 1$ und $J > 0$.

Bitte wenden!

2. Spin-$\frac{1}{2}$ ultrarelativistische Fermionen: **(15 Punkte)**

Betrachten Sie ein ultrarelativistisches Gas in drei Dimensionen bestehend aus Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen mit der Einteilchen-Energie $\varepsilon(\mathbf{k}) = c\,|\mathbf{k}|$. Der Einfachheit halber ignorieren Sie die thermische Aktivierung von Antiteilchen.

(a) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie E_F als Funktion der Teilchendichte $n = N/V$ durch $E_F = \hbar c(3\pi^2 n)^{1/3}$ gegeben ist.

(b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und den Druck des Gases.

(c) **(9 Punkte)** Zeigen Sie, dass für einen adiabatischen Prozess

$$\begin{aligned} pV^{\gamma} &= \text{konst.} \\ VT^{\beta} &= \text{konst.} \\ pT^{-\delta} &= \text{konst.} \end{aligned} \tag{2}$$

gilt. Bestimmen Sie die Exponenten γ, β, and δ.

3. Molekularfeld-Näherung für das Heisenberg-Modell: **(15 Punkte)**

Betrachten Sie das Heisenberg-Modell ($J > 0$),

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j,$$

wobei die Summe über alle Gitterpunkte i geht. Für beliebiges i beinhaltet die Summe über j die 6 nächsten Nachbarn in einem dreidimensionalen kubischen Gitter. Beachten Sie, dass $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ ein quantenmechanischer Operator mit $\mathbf{S}^2 = S(S+1)$ sowie $S = \frac{1}{2}$ ist.

(a) **(4 Punkte)** Führen Sie die Molekularfeld-Näherung für $\mathcal{H}$ durch und bestimmen Sie das molekulare Feld $\mathbf{h}_{\mathrm{mf}}$, das über $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{mf}} = -\mathbf{h}_{\mathrm{mf}} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i + E_0$ definiert ist (E_0 ist eine Konstante, kein Operator).

(b) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Zustandssumme für $\mathcal{H}_{\mathrm{mf}}$.

(c) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\langle \mathbf{S} \rangle = (0, 0, \langle S^z \rangle)$ durch eine nichtlineare Gleichung der Form $\langle S^z \rangle = f\left(\frac{J\langle S^z \rangle}{k_B T}\right)$ bestimmt wird. Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$.

(d) **(4 Punkte)** Finden Sie die Übergangstemperatur T_c als Funktion von J.

4. Bonus exercise. Bose Condensation: **(10 bonus points)**

Consider a gas of bosons with single particle energy $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ in an arbitrary spatial dimension $d \geq 3$.

(a) **(3 points)** Determine the density of states $\rho(\omega)$.
Hint. If a function $F(p)$ depends only on $p = |\mathbf{p}|$, then

$$\int d^d p\; F(p) = K_d \int_0^{\infty} dp\; p^{d-1}\; F(p), \qquad K_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},$$

where K_d is the surface of a d-dimensional unit sphere.

(b) **(4 points)** Find the Bose-condensation temperature T_0 as a function of the density.

(c) **(3 points)** What is the temperature dependence of the ground-state occupation?