Moderne Theoretische Physik III (Theorie F, Statistische Physik)
Nachklausur: Sommersemester 2012

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Dr. Igor Gornyi

45 Punkte + 15 Bonuspunkte; 120 Minuten

Mi. 24.07.2012, 15:45-18:00, Gerthsen HS

---

1. Quickies: **(15 Punkte)**

Beantworten Sie die folgenden Fragen so kurz wie möglich.

(a) **(1 Punkt)** Was besagt der 1. Hauptsatz der Thermodynamik?

(b) **(1 Punkt)** Zeichen Sie in ein p–V-Diagramm die isotherme Expansion eines idealen Gases für 2 verschiedene Temperaturen $T_1 < T_2$.

(c) **(1 Punkt)** Wie lautet die Gibbs-Duhem-Relation?

(d) **(2 Punkte)** Wie ist das kanonische Ensemble definiert? Geben Sie die Zustandssumme für das kanonische Ensemble an.

(e) **(2 Punkte)** Was passiert bei der Bose-Einstein-Kondensation? Was gilt für N?

(f) **(1 Punkte)** Skizzieren Sie die Ableitung $\frac{\partial n_B}{\partial E}$ der Bose-Verteilung in Abhängigkeit der Energie E.

(g) **(1 Punkte)** Wie lautet der Hamiltonian für das Heisenberg-Modell?

(h) **(2 Punkte)** Geben Sie eine grobe Abschätzung für die Übergangstemperatur des ein- und zweidimensionalen Heisenberg-Modells

(i) **(1 Punkte)** Was versteht man unter einem Phasenübergang n-ter Ordnung?

(j) **(3 Punkte)** Skizzieren Sie die Freie Energie, die Entropie und die Spezifische Wärmekapazität eines Systems, das einen Phasenübergang zweiter Ordnung durchläuft, als Funktion der Temperatur.

2. Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung: **(15 Punkte + 5 Bonuspunkte)**

Betrachten Sie das ferromagnetische Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung im Magnetfeld B:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N}\sum_{i,j} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i, \qquad J > 0.$$

Die Spins sind auf einem dreidimensionalen kubischen Gitter angeordnet. S_i bezeichnet die z-Komponente des Spins am Gitterplatz i und kann die Werte $\pm 1/2$ annehmen. Es wird über alle N Gitterplätze i, j summiert (die Wechselwirkung J verbindet jeden Spin mit jedem anderen auf dem Gitter).

(a) **(6 Punkte)** Führen Sie die Molekularfeld-Näherung für $\mathcal{H}$ durch. Bestimmen Sie in dieser Näherung die Zustandssumme und den mittleren Spin $\langle S \rangle$ pro Gitterplatz. Analysieren Sie die Selbstkonsistenz-Gleichung für $\langle S \rangle$ graphisch für $B = 0$.

(b) **(3 Punkte)** Finden Sie die kritische Temperatur T_c, bei der ein Phasenübergang vom paramagnetischen zum ferromagnetischen Zustand ($\langle S \rangle \neq 0$ für $B = 0$) mit spontaner Magnetisierung auftritt.

(c) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie für $T < T_c$ den Ordnungsparameter $\langle S \rangle$ als Funktion der reduzierten Temperatur $t = (T_c - T)/T_c$ in der Nähe des Übergangspunktes.

(d) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität χ als Funktion der Temperatur bei $B = 0$.

(e) **(5 Bonuspunkte)** Zeigen Sie, dass in unseren Fall von unendlich langreichweitiger Wechselwirkung die Molekularfeld-Näherung im Limes $N \to \infty$ exakt wird.

3. Landau-Modell des ferroelektrischen Phasenübergang: (15 Punkte)

In Bariumtitanat bildet sich unterhalb einer Temperatur $T_c^{(0)}$ spontan eine elektrische Polarisation P. Dies wird phänomenologisch beschrieben durch die folgende Landau-Entwicklung der freien Energie F:

$$F_0(T,P) = (T - T_c^{(0)})AP^2 + BP^4 + CP^6, \quad \text{wobei } A, B, C > 0.$$

Die Polarisation ist so stark, dass sie eine Verzerrung x des Gitters bewirkt. Der Beitrag der Gitterverzerrung zur freien Energie ist gegeben durch

$$F_1(P,x) = DxP^2 + \frac{1}{2}Ex^2,$$

so dass $F(T,P,x) = F_0(T,P) + F_1(P,x)$.

(a) **(3 Punkte)** Wie lauten die Bedingungsgleichungen für die Extrema von $F(T,P,x)$ für ein vorgegebenes T?

(b) **(3 Punkte)** Eliminieren Sie damit x. Zeigen Sie dass sich die effektive freie Energie $\tilde{F}$ schreiben lässt als $\tilde{F}(T,P) = (T - T_c^{(0)})AP^2 + \tilde{B}P^4 + CP^6$. Wie groß muss die Kopplung D im Vergleich zur elastischen Konstante E sein, damit $\tilde{B} < 0$ gilt.

(c) **(6 Punkte)** Bestimmen Sie für $\tilde{B} < 0$ die Minima von $\tilde{F}$ als Funktion von P. Zeigen Sie, dass unterhalb einer kritischen Temperatur $T_c^{(1)}$ die Lösungen existieren, die nicht kontinuierlich aus $P = 0$ hervorgehen, und bestimmen Sie diese Temperatur.

(d) **(3 Punkte)** Skizzieren Sie $\tilde{F}$ als Funktion von P für die Temperaturen

$$\text{(i)} \quad T > T_c^{(1)}, \qquad \text{(ii)} \quad T_c^{(1)} > T > T_c^{(0)}, \qquad \text{(iii)} \quad T_c^{(0)} > T.$$

4. Elektronen in Graphen: (10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein *ultrarelativistisches* Gas in *zwei* Dimensionen bestehend aus Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen mit der Einteilchen-Energie $\varepsilon(\mathbf{p}) = c\,|\mathbf{p}|$. Der Einfachheit halber ignorieren Sie die thermische Aktivierung von Antiteilchen.

(a) **(4 Punkte)** Finden Sie die Fermi-Energie E_F als Funktion der Teilchendichte $n = N/V$. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und den Druck P des Gases.

(b) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass für einen adiabatischen Prozess

$$PV^\gamma = \text{konst}, \quad VT^\beta = \text{konst}, \quad PT^{-\delta} = \text{konst}$$

gilt. Bestimmen Sie die Exponenten γ, β, and δ.