Hauptklausur zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön **16.07.2013**

Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke **Bearbeitungszeit 120 min**

---

1. Momente (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Eine Zufallsvariable $X \in [-\infty, \infty]$ habe Momente $\langle X^n \rangle = a^n$. Wie sieht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung aus?

(b) (2 Punkte) Eine Zufallsvariable $X \in [0, \infty]$ habe Momente $\langle X^n \rangle = n! a^{-n}$, $(a > 0)$. Wie sieht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung aus?

Hinweis: Verwenden Sie die charakteristische Funktion. Bei Aufgabenteil b) müssen sie den Residuensatz verwenden.

2. Dichte-Matrix (3 Punkte)

Betrachten Sie zwei Spin-1/2 Teilchen die mit einer Wahrscheinlichkeit P_1 im Triplett-Zustand $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$, und mit einer Wahrscheinlichkeit P_2 im Singulett-Zustand $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ sind.

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ d.h. $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$.

(b) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass uns nur der erste Spin als Messgrösse interessiert. Bestimmen Sie dessen reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin 'ausspuren': $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1'\sigma_2}$.

3. Kanonische und Mikrokanonische Ensemble (7 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N unterscheidbaren, wechselwirkungsfreien Spins ($S = 1/2$) in einem externen Magnetfeld H_z. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist gegeben durch,

$$H = -\frac{1}{2}\mu_B H_z \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\,, \qquad \text{mit } \sigma_i = \pm 1. \tag{1}$$

(a) (3 Punkte) Wenn die Energie des Systems E ist, wie viele Spins mit $\sigma_i = +1$ und wie viele Spins mit $\sigma_i = -1$ gibt es? Wie viele Spinkonfigurationen mit Energie E gibt es jeweils? Zeigen Sie nun, dass die innere Energie im mikrokanonischen Ensemble gegeben ist durch

$$U = -\frac{1}{2}N\mu_B H_z \tanh\frac{\mu_B H_z}{2kT}\,. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\ln N! \approx N \ln N - N$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die innere Energie im kanonischen Ensemble durch den selben Ausdruck gegeben ist.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie für das kanonische Ensemble die Entropie S, die Wärmekapazität C_H, und die Magnetisierung M.

4. Ising-Modell **(6 Punkte)**

Der Hamiltonoperator eines Systems aus wechselwirkenden Spins in einem externen Magnetfeld H_z, normiert mit der Temperatur, ist gegeben durch,

$$\frac{H}{kT} = -j\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \tag{3}$$

mit periodischen Randbedingungen $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ und $\sigma_i = \pm 1$. Hier ist j die normierte Kopplungsstärke und $h = \mu_B H_z/2kT$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass sich die Zustandsumme schreiben lässt als,

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\sum_{\sigma_2=\pm 1}\sum_{\sigma_3=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-U(\sigma_1,\sigma_2)}e^{-U(\sigma_2,\sigma_3)}\cdots e^{-U(\sigma_N,\sigma_1)} \tag{4}$$

und bestimmen Sie die Funktion $U(\sigma_i, \sigma_{i+1})$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie nun, dass sich die Zustandssumme in folgende Form bringen lässt,

$$Z_N = \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^N, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} e^{j+h} & e^{-j} \\ e^{-j} & e^{j-h} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Hinweis: Denken Sie an die Darstellung von Matrixoperationen als Summe über Indizes.

(c) (2 Punkte) Die Eigenwerte von $\mathbf{T}$ sind gegeben durch $\lambda_\pm = e^j[\cosh h \pm (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}]$. Für große N können sie λ_- vernachlässigen ($\lambda_- \to 0$). Berechnen Sie für diesen Fall die Magnetisierung der Spin-Kette.

5. Basiswechsel in zweiter Quantisierung **(5 Punkte)**

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ werden durch eine lineare Transformation in neue Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ transformiert ($|\psi_\mu\rangle$ und $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ seien Orthonormalbasen)

$$|\tilde{\psi}_\nu\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\,\tilde{\psi}_\nu\rangle \tag{6}$$

Die Transformationsregeln zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ und der Operatoren $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ für die Zustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ sind analog gegeben durch

$$\hat{b}^\dagger_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle^\star\,\hat{a}^\dagger_\mu\,, \qquad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle\,\hat{a}_\mu\,. \tag{7}$$

(a) (1 Punkt) Wenn $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ die Kommuntatorrelation für Bosonen erfüllen, zeigen Sie, dass $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ dieselbe Relation erfüllen.

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Grössen) invariant ist unter einer Basistransformation, dass also gilt

$$\sum_\nu \hat{b}^\dagger_\nu\hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}^\dagger_\mu\hat{a}_\mu \tag{8}$$

(c) (1 Punkt) Für manche Probleme ist die Basis der Ortseigenzustände hilfreich wobei der Ort x eine kontinuierliche Variable ist. Die Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am Ort x erzeugen bzw. vernichten, sind allgemein gegeben durch die Transformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^\star\,\hat{c}^\dagger_\mu\,, \qquad \hat{\psi}\;(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle\,\hat{c}_\mu\,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen für fermionische Feldoperatoren gegeben sind durch

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\} = \delta(x - x') \tag{10}$$

wenn $\hat{c}^\dagger_\mu$ und $\hat{c}_\mu$ die fermionischen Kommutatorrelationen erfüllen.

(d) (2 Punkte) Gegeben sei ein Operator der Form $\hat{V} = \int d^3x\,\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\mathbf{V}_{\mathrm{imp}}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})$, wobei $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ wie in Teilaufgabe (c) fermionische Feldoperatoren darstellen.
Drücken Sie diesen Operator $\hat{V}$ in zweiter Quantisierung durch die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger_{\mathbf{p}}$ und $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ im Impulsraum aus ($\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar)$).