Lösungsvorschlag zur Hauptklausur zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

16.07.2013
Bearbeitungszeit 120 min

---

1. Momente (4 Punkte)

Über die charakteristische Funktion

$$\phi(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$$

läßt sich die Zufallsverteilung durch

$$\rho(X) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikX} \phi(k)$$

bestimen

(a) (2 Punkte) Zufallsvariable $X \in [-\infty, \infty]$, Momente $\langle X^n \rangle = a^n$.
Charakteristische Funktion

$$\phi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ika)^n}{n!} = e^{ika}$$

Zufallsverteilung

$$\rho(X) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikX} e^{ika} = \delta(X - a)$$

(b) Zufallsvariable $X \in [0, \infty]$, Momente $\langle X^n \rangle = n! a^{-n}$, $(a > 0)$.
Charakteristische Funktion

$$\phi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} n! a^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{a} \right)^n = \frac{a}{a - ik}$$

Zufallsverteilung, Integration über Cauchy, $(X, a > 0$, s.o.)

$$\rho(X) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} e^{-ikX} \frac{a}{a - ik} = a e^{-aX}$$

2. Dichte-Matrix (3 Punkte)

Zwei Spin-1/2 Teilchen, sind mit Wahrscheinlichkeit P_1 im Triplett-Zustand $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$, und mit einer Wahrscheinlichkeit P_2 im Singulett-Zustand $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$. Die Dichtematrix $\hat{\rho}$ soll in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ d.h. $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$ geschrieben werden:

(a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
\rho = \sum_n P_n |n\rangle\langle n| &= \frac{P_1}{2}\Big(|+-\rangle + |-+\rangle\Big)\Big(\langle +-| + \langle -+|\Big) + \frac{P_2}{2}\Big(|+-\rangle - |-+\rangle\Big)\Big(\langle +-| - \langle -+|\Big) \\
&= \frac{P_1+P_2}{2}|+-\rangle\langle +-| + \frac{P_1-P_2}{2}|+-\rangle\langle -+| + \frac{P_1-P_2}{2}|-+\rangle\langle +-| + \frac{P_1+P_2}{2}|-+\rangle\langle -+| \\
&= \Big(|++\rangle \quad |+-\rangle \quad |-+\rangle \quad |--\rangle\Big) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_1+P_2}{2} & \frac{P_1-P_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{P_1-P_2}{2} & \frac{P_1+P_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle ++| \\ \langle +-| \\ \langle -+| \\ \langle --| \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D.h. in der gewünschten Basis

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_1+P_2}{2} & \frac{P_1-P_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{P_1-P_2}{2} & \frac{P_1+P_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2 Punkte) Reduzierte Dichtematrix, Spin 2 ausgespurt:

$$\begin{aligned}
\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} &= \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1'\sigma_2} \\
\rho^{\text{red}}_{+,+} &= \rho_{++,++} + \rho_{+-,+-} = 0 + \frac{P_1+P_2}{2} \\
\rho^{\text{red}}_{+,-} &= \rho_{++,-+} + \rho_{+-,--} = 0 + 0 \\
\rho^{\text{red}}_{-,+} &= \rho_{-+,++} + \rho_{--,+-} = 0 + 0 \\
\rho^{\text{red}}_{-,-} &= \rho_{-+,-+} + \rho_{--,--} = \frac{P_1+P_2}{2} + 0
\end{aligned}$$

Und damit

$$\rho^{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{P_1+P_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{P_1+P_2}{2} \end{pmatrix}$$

3. Kanonische und Mikrokanonische Ensemble (7 Punkte)

Wir betrachten N unterscheidbare, nichtwechselwirkende Spins ($S = 1/2$) im externen Magnetfeld H_z.

Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H = -\frac{1}{2}\mu_\mathrm{B} H_z \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\,, \quad \text{mit} \quad \sigma_i = \pm 1$$

(a) (3 Punkte) Innere Energie

Mikrokanonisches Ensemble, bei Energie E wieviele Spins $N_\uparrow$ mit $\sigma_i = +1$, wieviele Spins $N_\downarrow$ mit $\sigma_i = -1$.

Energie kann durch $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ ausgedrückt werden :

$$E = -\frac{1}{2}\mu_\mathrm{B} H_z (N_\uparrow - N_\downarrow)$$

da auch gilt $N_\uparrow + N_\downarrow = N$, kann man den Ausdruck nach z.B. $N_\uparrow$ auflösen und danach $N_\downarrow$ berechnen

$$\begin{aligned} N_\uparrow =& \frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \\ N_\downarrow =& N - N_\downarrow = \frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \end{aligned}$$

Jetzt soll angegegebn werden, wieviele Spinkonfiguration es für eine Energie E gibt:

$$\Sigma(E) = \binom{N}{N_\uparrow} = \binom{N}{N_\downarrow} = \frac{N!}{N_\uparrow!(N-N_\uparrow)!} = \frac{N!}{N_\downarrow!(N-N_\downarrow)!} \quad \left(= \frac{(N_\uparrow + N_\downarrow)!}{N_\uparrow! N_\downarrow!} \right)$$

Oder als explizite Funktion der Energie

$$\Sigma(E) = \frac{N!}{(\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z})!(\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z})!} \tag{1}$$

Damit erhalten wir unter Verwendung der Stirling-Formel ($\ln N! \approx N \ln N - N$) für die Entropie

$$S = k \ln \Sigma(E) \approx k \left[N \ln N - \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right) \ln\left[\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] - \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right) \ln\left[\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] \right],$$

und berechnen daraus die Temperatur

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{k}{\mu_\mathrm{B} H_z} \ln\left[\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] + \frac{k}{\mu_\mathrm{B} H_z} - \frac{k}{\mu_\mathrm{B} H_z} \ln\left[\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] - \frac{k}{\mu_\mathrm{B} H_z} \\ &= \frac{k}{\mu_\mathrm{B} H_z} \left(\ln\left[\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] - \ln\left[\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right] \right). \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man nun invertieren und nach E auflösen dadurch erhält man für die innere Energie

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT} \right) &= \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right) \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right)^{-1} \\ \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right) \exp\left(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT} \right) &= \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \right) \\ \rightarrow \quad \frac{E}{\mu_\mathrm{B} H_z} \left(1 + e^{\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT}} \right) &= \frac{N}{2} \left(1 - e^{\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = E = \frac{N \mu_\mathrm{B} H_z}{2} \frac{1 - \exp\left(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT} \right)}{1 + \exp\left(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{kT} \right)} &= \frac{1}{2} N \mu_\mathrm{B} H_z \frac{\exp(\frac{-\mu_\mathrm{B} H_z}{2kT}) - \exp(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{2kT})}{\exp(\frac{-\mu_\mathrm{B} H_z}{2kT}) + \exp(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{2kT})} \\ &= -\frac{1}{2} N \mu_\mathrm{B} H_z \tanh\left(\frac{\mu_\mathrm{B} H_z}{2kT} \right) \end{aligned}$$

(b) (1 Punkt) Kanonisches Ensemble

Es ist zu zeigen, daß sich für das kanonische Ensemble der gleiche Ausdruck für die innere Energie ergibt. Hierzu berechnet man zuerst die Zustandssumme

$$\begin{aligned}
Z_K &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\exp\Big[-\beta\sum_i^N\Big(-\frac{\mu_B H_z\sigma_i}{2}\Big)\Big] \qquad \text{(faktorisiert)}\\
&= \prod_{i=1}^N\Big(\sum_{\sigma_i=\pm1}\exp\Big[\beta\frac{\mu_B H\sigma_i}{2}\Big]\Big) = \Big[\exp\Big(\frac{\beta\mu_B H_z}{2}\Big)+\exp\Big(\frac{-\beta\mu_B H_z}{2}\Big)\Big]^N\\
&= \Big[2\cosh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\Big]^N
\end{aligned}$$

und daraus die innere Energie

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_K = -\frac{\partial}{\partial\beta}N\ln\Big[2\cosh\Big(\frac{\beta\mu_B H_z}{2}\Big)\Big] = -N\Big(\frac{\mu_B H_z}{2}\Big)\frac{2\sinh\big(\frac{1}{2}\beta\mu_B H_z\big)}{2\cosh\big(\frac{1}{2}\beta\mu_B H_z\big)}\\
&= -\frac{1}{2}N\mu_B H_z\tanh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)
\end{aligned}$$

(c) Kanonische Ensemble: Entropie S, die Wärmekapazität C_H, Magnetisierung M

Aus der inneren Energie (s.o.) und der freien Entalpie[1]

$$G = -kT\ln Z = -kTN\ln\Big[2\cosh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\Big]$$

können nun die thermodynamischen Größen berechnet werden.

- Entropie

$$\begin{aligned}
S &= -\Big(\frac{\partial G}{\partial T}\Big) = kN\ln\Big[2\cosh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\Big] + kTN\Big(-\frac{\mu_B H_z}{2kT^2}\Big)\tanh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\\
&= kN\Big(\ln\Big[2\cosh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\Big] - \frac{\mu_B H_z}{2kT}\tanh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)\Big)\\
&= -G/T + U/T
\end{aligned}$$

- Magnetisierung

$$M = -\Big(\frac{\partial G}{\partial H_z}\Big) = kTN\Big(\frac{\mu_B}{2kT}\Big)\tanh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big) = \frac{1}{2}N\mu_B\tanh\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)$$

Bemerkung: Man sieht jetzt auch, das die innere Energie gegeben ist durch

$$U = -MH_z.$$

- Wärmekapazität

$$\begin{aligned}
C_H &= \Big(\frac{\partial U}{\partial T}\Big)_H = -\frac{1}{2}N\mu_B H_z\Big(\frac{-\mu_B H_z}{2kT^2}\Big)\Big(1-\tanh^2\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT^2}\Big)\Big)\\
&= kN\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)^2\Big(1-\tanh^2\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT^2}\Big)\Big)\\
&= kN\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT}\Big)^2\cosh^{-2}\Big(\frac{\mu_B H_z}{2kT^2}\Big)
\end{aligned}$$

[1] In der Literatur ist gelegentlich schon die freie Energie(F) eine Funktion des Magnetfelds (H) statt der Magnetisierung (M). (Bei anderen intensiven Größen (V,N) und den entsprechenden extensiven Größen (p,μ) ist die dies hingegen eindeutig.) Bei der Bewertung lassen wir hier und im folgenden daher F und G gelten.

4. Ising-Modell (6 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Systems aus wechselwirkenden Spins, normiert mit der Temperatur, sei gegeben durch,

$$\frac{H}{kT} = -j\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

mit periodischen Randbedingungen $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ und $\sigma_i = \pm 1$. Hier ist j die normierte Kopplungsstärke und $h = \mu_\mathrm{B} H_z/2kT$.

(a) (2 Punkte) Es ist zu zeigen, dass die Zustandsumme sich schreiben lässt als

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} e^{-U(\sigma_1,\sigma_2)}e^{-U(\sigma_2,\sigma_3)}\dots e^{-U(\sigma_N,\sigma_1)},$$

weiter soll die entsprechende Funktion $U(\sigma_i,\sigma_{i+1})$ bestimmt.

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} \exp\left[-\beta\hat{H}\right]$$

$$\left|\begin{aligned}\beta\hat{H} &= -j\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i+\sigma_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N}\left(-j\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{N}U(\sigma_i,\sigma_{i+1})\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}Z_N &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N}U(\sigma_i,\sigma_{i+1})\right]\\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} e^{-U(\sigma_1,\sigma_2)}e^{-U(\sigma_2,\sigma_3)}\dots e^{-U(\sigma_N,\sigma_1)}\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ benutzt wurden. U ist damit

$$U(\sigma_i,\sigma_{i+1}) = -j\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1}).$$

(b) (2 Punkte) Es ist zu zeigen, dass sich die Zustandssumme in die Form

$$Z_N = \operatorname{tr} T^N, \qquad T = \begin{pmatrix} e^{j+h} & e^{-j}\\ e^{-j} & e^{j-h}\end{pmatrix}.$$

bringen lässt.
Definiere dafür die Transfer-Matrix $T_{\sigma,\sigma'} = e^{-U(\sigma,\sigma')}$, mit $U(\sigma_i,\sigma_{i+1})$ aus Aufgabenteil a).

$$U_{1,1} = -j-h, \quad U_{1,-1} = U_{-1,1} = j, \quad U_{-1,-1} = -j+h \to T = \begin{pmatrix} e^{j+h} & e^{-j}\\ e^{-j} & e^{j-h}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}Z_N &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} e^{-U(\sigma_1,\sigma_2)}e^{-U(\sigma_2,\sigma_3)}\dots e^{-U(\sigma_N,\sigma_1)}\\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1} T_{\sigma_1,\sigma_2}T_{\sigma_2,\sigma_3}\dots T_{\sigma_N,\sigma_1}\end{aligned}$$

Matrixprodukt: $\sum_j M_{ij}M_{jk} = (M^2)_{ik}$, daher

$$\sum_{\sigma_2=\pm1}\sum_{\sigma_3=\pm1} T_{\sigma_1,\sigma_2}T_{\sigma_2,\sigma_3}T_{\sigma_3,\sigma_4} = \sum_{\sigma_3=\pm1}(T^2)_{\sigma_1,\sigma_3}T_{\sigma_3,\sigma_4} = T^3_{\sigma_1,\sigma_4} \qquad \text{usw.}$$

und Spur: $\operatorname{tr} M = \sum_i M_{ii}$,

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm1}(T^N)_{\sigma_1,\sigma_1} = \operatorname{tr} T^N$$

(c) (2 Punkte) Magnetisierung

Die Eigenwerte von T sind gegeben durch $\lambda_\pm = e^j[\cosh h \pm (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}]$. Für große N können sie λ_- vernachlässigen ($\lambda_- \to 0$). Für diesen Fall soll die Magnetisierung der Spin-Kette berechnet werden.

$$Z_N = \operatorname{tr} T^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \approx \lambda_+^N$$

$$G(T,H,N) = -kT \ln Z = -kTN \ln \lambda_+ = -kTNj - kTN \ln\big[\cosh h + (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}\big]$$

$$\begin{aligned}
M(T,H) = -\frac{\partial G(T,H)}{\partial H} &= -\frac{\mu_\mathrm{B}}{2kT}\frac{\partial G(T,H)}{\partial h} = \frac{\mu_\mathrm{B}}{2kT} kTN \frac{\sinh h + \frac{1}{2}(\sinh^2 h + e^{-4j})^{-1/2}\; 2\sinh h \cosh h}{\cosh h + (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\mu_\mathrm{B} N \frac{\sinh h\big(1 + (\sinh^2 h + e^{-4j})^{-1/2}\cosh h\big)}{\cosh h + (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2})} \\
&= \frac{1}{2}\mu_\mathrm{B} N \frac{\sinh h\big((\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2} + \cosh h\big)}{(\cosh h + (\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2})\,(\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\mu_\mathrm{B} N \frac{\sinh h}{(\sinh^2 h + e^{-4j})^{1/2}}
\end{aligned}$$

5. Basiswechsel in zweiter Quantisierung (5 Punkte)

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ werden durch eine lineare Transformation in neue Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ transformiert ($|\psi_\mu\rangle$ und $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ seien Orthonormalbasen)

$$|\tilde{\psi}_\nu\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle \langle\psi_\mu|\,\tilde{\psi}_\nu\rangle$$

$|\psi_\mu\rangle$ und $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ seien Orthonormalbasen

Die Transformationsregeln zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ und der Operatoren $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ für die Zustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ sind analog gegeben durch

$$\hat{b}^\dagger_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle^\star \hat{a}^\dagger_\mu \qquad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu$$

(a) (1 Punkt) Wenn $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ die Kommuntatorrelation für Bosonen erfüllen, zeigen Sie, dass $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ dieselbe Relation erfüllen.

$$\left[a_\mu,\, a^\dagger_{\mu'}\right] = \delta_{\mu,\mu'}$$

$$\begin{aligned}\left[b_\nu,\, b^\dagger_{\nu'}\right] &= \left[\sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle\, a_\mu,\ \sum_{\mu'} \langle\tilde{\psi}_{\nu'}|\psi_{\mu'}\rangle^* a^\dagger_{\mu'}\right] = \sum_{\mu,\mu'} \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle \langle\tilde{\psi}_{\nu'}|\psi_{\mu'}\rangle^* \left[a_\mu, a^\dagger_{\mu'}\right] \\ &= \sum_\mu \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle \langle\psi_\mu|\tilde{\psi}_{\nu'}\rangle = \langle\tilde{\psi}_\nu| \left(\sum_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\right) |\tilde{\psi}_{\nu'}\rangle = \langle\tilde{\psi}_\nu|\tilde{\psi}'_\nu\rangle = \delta_{\nu,\nu'}\end{aligned}$$

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Größen) invariant ist unter einer Basistransformation, dass also gilt

$$\begin{aligned}\sum_\nu \hat{b}^\dagger_\nu \hat{b}_\nu &= \sum_{\mu,\mu',\nu} a^\dagger_\mu a_{\mu'} \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\rangle^* \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_{\mu'}\rangle = \sum_{\mu,\mu'} a^\dagger_\mu a_{\mu'} \sum_\nu \langle\psi_\mu|\tilde{\psi}_\nu\rangle \langle\tilde{\psi}_\nu|\psi_{\mu'}\rangle \\ &= \sum_{\mu,\mu'} a^\dagger_\mu a_{\mu'} \langle\psi_\mu|\psi_{\mu'}\rangle = \sum_\mu \hat{a}^\dagger_\mu \hat{a}_\mu\end{aligned}$$

(c) (1 Punkt) Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ gegeben durch die Transformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^\star \hat{c}^\dagger_\mu \qquad \hat{\psi}\ (x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle\, \hat{c}_\mu$$

Zu zeigen, dass die Vertauschungsrelationen für fermionische Feldoperatoren antikommutieren. Gegeben ist $\left\{\hat{c}_\mu, \hat{c}^\dagger_{\mu'}\right\} = \delta_{\mu,\mu'}$.

$$\left\{\hat{\psi}(x),\ \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = \sum_{\mu,\mu'} \langle x|\psi_\mu\rangle \langle x'|\psi_{\mu'}\rangle^* \left\{\hat{c}_\mu, \hat{c}^\dagger_{\mu'}\right\} = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle \langle\psi_\mu|x'\rangle = \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$$

(d) (2 Punkte) Der Operator $\hat{V}$ ist gegeben durch $\hat{V} = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) V_{\mathrm{imp}}(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x})$, dabei sind $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ fermionische Feldoperatoren. Der Operator $\hat{V}$ soll nun in zweiter Quantisierung durch die Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}^\dagger_\mathbf{p}$ und $\hat{c}_\mathbf{p}$ im Impulsraum ($\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar)$) ausgedrückt werden. Allgemein:

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \int \mathrm{d}x\, \hat{\psi}^\dagger(x) V_{\mathrm{imp}}(x) \hat{\psi}(x) = \int \mathrm{d}x \sum_{\mu,\mu'} \langle x|\mu\rangle^* \hat{c}^\dagger_\mu V(x) \langle x|\mu'\rangle\, \hat{c}_{\mu'} \\ &= \sum_{\mu,\mu'} \hat{c}^\dagger_\mu \hat{c}_{\mu'} \int \mathrm{d}x\, \langle x|\mu\rangle^* \langle x|\mu'\rangle\, V(x)\end{aligned}$$

und explizit für den Impulsraum und 3D ($\mu = \mathbf{p}$) mit $\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar)$:

$$\hat{V} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{c}^\dagger_\mathbf{p} \hat{c}_{\mathbf{p}'} \int \mathrm{d}^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{x}/\hbar} V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{c}^\dagger_\mathbf{p} \hat{c}_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$