Moderne Theoretische Physik III SS 2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. U. Karahasanovic, Dr. P. P. Orth

Klausur, 100 Punkte
30.07.2014, 17:00 - 19:00 Uhr, 120 min

---

1. Kurzfragen $(5 + 10 + 10 + 10 + 5 + 10 = 50$ Punkte)

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen kurz aber verständlich. In manchen Fällen ist es auch nötig eine kleine Rechnung durchzuführen.

(a) Wie lautet der zweite Hauptsatz der Thermodynamik?

(b) Wie lauten die Bose-und Fermiverteilungsfunktionen $n_B(\epsilon, \mu, T)$ und $n_F(\epsilon, \mu, T)$? Skizzieren Sie in beiden Fällen das chemische Potential $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur im Fall eines Gases mit quadratischer Dispersionsrelation $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}^2/2m$ in $d = 3$ Dimensionen. Welche Form nimmt n_B bei hohen Temperaturen an, welche Form n_F?

(c) Wie lautet der Ausdruck für die freie Energie F eines klassichen idealen Gases in $d = 3$ Dimensionen? Führen Sie alle Integrationen aus. Schätzen Sie, ab welcher Gasdichte n quantenmechanische Effekte zu berücksichtigen sind. Sie sollten die Lösung in Form einer Ungleichung angeben.

(d) Leiten Sie den Ausdruck für das großkanonische Potential Ω eines Gases von nicht-wechselwirkenden Fermionen mit Spin-1/2 und Dispersionsrelation $\epsilon_{\boldsymbol{k}}$ her. Geben Sie den Ausdruck für Ω für den Fall, dass die Temperatur $T = 0$ ist an.

(e) Wie lautet das Äquipartitionstheorem? Geben Sie die spezifische Wärme eines zweiatomigen Gases in $d = 3$ Dimensionen für hohe Temperaturen an.

(f) Was ist die Bose-Einstein-Kondensation (BEK)? Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c für BEK von freien Bosonen in $d = 3$ Dimensionen. Dimensionslose Integrale müssen nicht ausgeführt werden.

2. Elektronen in Kohlenstoffnanoröhrchen $(5 + 5 + 5 + 10 = 25$ Punkte)

Betrachten Sie ein nicht-wechselwirkendes Gas von Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen mit linearer Dispersionsrelation $\epsilon(k) = v|k|$ in einer Dimension ($d = 1$). Die Fermigeschwindigkeit sei $v > 0$. Eine solche Situation beschreibt Elektronen in einem eindimensionalen Kohlenstoffnanoröhrchen.

(a) Bestimmen Sie die Fermienergie E_F als Funktion der Teilchendichte N/L, wobei N die Gesamtzahl der Teilchen beschreibt und L die Länge des Systems darstellt.

(b) Berechnen Sie die innere Energie E des Gases bei $T = 0$.

(c) Berechnen Sie das großkanonische Potential Ω, setzen Sie es mit E für allgemeine Temperaturen T in Beziehung und bestimmen Sie den Druck p des Gases.

(d) Zeigen Sie dass für einen adiabatischen Prozess bei konstanter Teilchenzahl gilt

$$pL^\gamma = \text{konst.}, \qquad LT^\beta = \text{konst.}, \qquad pT^{-\delta} = \text{konst.}.$$

Bestimmen Sie die Exponenten γ, β und δ.

3. Brownsche Bewegung (5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Koordinate $x(t)$ und Masse m in einem harmonischen Potential der Frequenz ω_0. Das Teilchen befinde sich in einem äusseren Medium wie einem viskosen Fluid mit Temperatur T. Die Kopplung an die Umgebung führt zu einer thermischen Zufallskraft $\xi(t)$, die durch die Momente $\langle\xi(t)\rangle_\xi = 0$ und $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle_\xi = 2m\gamma k_B T\delta(t-t')$ charakterisiert ist. Hier bezeichnet $\langle\cdot\rangle_\xi$ das statistische Mittel über die Zufallskraft. Ausserdem führt die Kopplung an die Umgebung zu Dämpfung mit Dämpfungskonstante $0 < \gamma < 2\omega_0$. Die Bewegungsgleichung des Teilchens lautet

$$m\ddot{x}(t) + m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = \xi(t)\,.$$

(a) Bestimmen Sie $x(t)$ für $t > 0$ und allgemeinen Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ sowie $\dot{x}(0) = v_0$. Die Lösung ist von der Form $x(t) = x_h(t) + \frac{1}{m}\int_0^t dt' G(t-t')\xi(t')$, wobei $x_h(t)$ die homogene Lösung beschreibt und $G(t-t') = \theta(t-t')e^{-\gamma(t-t')/2}\sin[\Omega(t-t')]/\Omega$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ die Greenfunktion des harmonischen Oszillators ist.

(b) Berechnen Sie das Moment $\langle x(t)\rangle_\xi$ und geben Sie eine physikalische Interpretation Ihres Ergebnisses an.

(c) Berechnen Sie das Moment $\langle x(t)x(t')\rangle_\xi$ für $t > t'$. Verwenden Sie, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{2\gamma k_B T}{m\Omega^2}\int_0^{t'} ds e^{\gamma s}\sin\big[\Omega(t-s)\big]\sin\big[\Omega(t'-s)\big] \\
&= -\frac{k_B T}{m\omega_0^2}\cos(\Omega t)\cos(\Omega t') - \frac{\gamma k_B T}{2m\omega_0^2\Omega}\sin[\Omega(t+t')] - \frac{k_B T(4\omega_0^2+\gamma^2)}{4m\omega_0^2\Omega^2}\sin(\Omega t)\sin(\Omega t') \\
&\quad + \frac{k_B T}{m\omega_0^2}e^{\gamma t'}\Big(\cos[\Omega(t-t')] + \frac{\gamma}{2\Omega}\sin[\Omega(t-t')]\Big)
\end{aligned}$$

(d) Geben Sie $\langle x(t)x(t')\rangle_\xi$ für den Fall an dass sowohl $t \gg \gamma^{-1}$ als auch $t' \gg \gamma^{-1}$ und $t > t'$. Welche Terme können dann vernachlässigt werden und warum? Betrachten Sie die Limites $|t-t'| \to 0$ und $|t-t'| \to \infty$ und geben Sie eine physikalische Interpretation Ihres Resultats für $\langle x(t)x(t')\rangle_\xi$ in diesem Regime an.

(e) Nehmen Sie nun an, dass das Teilchen sich zu Beginn der Bewegung bereits im thermischen Gleichgewicht befand und die Erwartungswerte $\langle x_0^2\rangle_\xi$ und $\langle v_0^2\rangle_\xi$ durch das Äquipartitionstheorem bestimmt sind. Zeigen Sie dass dadurch eine Reihe von Termen im Ausdruck von $\langle x(t)x(t')\rangle_\xi$ verschwindet. Geben Sie eine kurze physikalische Erklärung warum diese Terme in diesem Fall verschwinden.