

Moderne Theoretische Physik III SS 2014

Prof. Dr. J. Schmalian

2. Klausur, 100 Punkte

Dr. U. Karahasanovic, Dr. P. P. Orth

21.10.2014, 16:00 - 18:00 Uhr, 120 min

1. Kurzfragen

(10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 Punkte)

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen kurz aber verständlich. In manchen Fällen ist es auch nötig eine kleine Rechnung durchzuführen.

- (a) Berechnen Sie die Zustandsdichte eines Gases von Photonen mit Dispersionsrelation $\epsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$ in einem dreidimensionalen Volumen V . Geben Sie eine Formel für die Anzahl von Photonen bei Temperatur T an. *Hinweis:* das chemische Potential für Photonen ist $\mu = 0$.
- (b) Verwenden Sie das Äquipartitionstheorem, um die spezifische Wärme c_V eines Gases des diatomigen Moleküls SrF bei so hohen Temperaturen, dass alle Bewegungsfreiheitsgrade thermisch angeregt werden können, anzugeben.
- (c) Skizzieren Sie das Verhalten der Entropie bei einem Phasenübergang erster Ordnung. Skizzieren Sie außerdem das Verhalten der Entropie und der spezifischen Wärme bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung.
- (d) Eine thermodynamische Größe ändert sich gemäß $\delta X = (A \ln V + B \ln T + C)dT + D \frac{T}{V}dV + \text{konst.}$, wobei T die Temperatur, V das Volumen und A, B, C, D reelle Konstanten sind. Geben Sie an unter welchen Bedingungen X eine Zustandsgröße ist.
- (e) Betrachten Sie ein System das nur zwei Zustände mit den Energien $E_0 = 0$ und $E_1 > 0$ annehmen kann. Das System sei an ein Wärmebad der Temperatur T gekoppelt. Wie groß muss T sein, damit die Wahrscheinlichkeit p_1 , das System im Zustand mit der Energie E_1 zu finden gleich $1/4$ ist?

2. Elektronen in zweidimensionalen Quantentöpfen (5 + 5 + 5 + 10 = 25 Punkte)

Betrachten Sie ein nicht-wechselwirkendes Gas von Spin- $\frac{1}{2}$ Fermionen mit quadratischer Dispersionsrelation $\epsilon(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2/2m^*$ mit effektiver Masse m^* in zwei Dimensionen ($d = 2$). Eine solche Situation beschreibt zum Beispiel Elektronen in zweidimensionalen GaAs-AlGaAs Quantentöpfen die unter anderem für die Herstellung von Laserdioden verwendet werden.

- (a) Bestimmen Sie die Fermienergie E_F als Funktion der Teilchendichte N/V , wobei N die Gesamtzahl der Teilchen beschreibt und V das Volumen des Systems darstellt.
- (b) Berechnen Sie die innere Energiedichte E/V des Gases bei $T = 0$ als Funktion der Dichte N/V .
- (c) Berechnen Sie das großkanonische Potential Ω . Drücken Sie Ihr Ergebnis als ein Integral über Einteilchenenergien ϵ aus. Setzen Sie dann Ω mit E für allgemeine Temperaturen T in Beziehung und bestimmen Sie den Druck p des Gases.
- (d) Zeigen Sie dass für einen adiabatischen Prozess bei konstanter Teilchenzahl gilt

$$pV^\gamma = \text{konst.}, \quad VT^\beta = \text{konst.}, \quad pT^{-\delta} = \text{konst.}$$

Bestimmen Sie die Exponenten γ, β und δ .

3. Gekoppelte Ordnungsparameter

(10 + 10 + 5 = 25 Punkte)

Diese Frage ist motiviert durch den experimentellen Nachweis der sogenannten „nematischen“ Phase in den eisenbasierten Supraleitern durch Messung einer effektiven elastischen Konstante. Zur Beantwortung der Frage ist die Kenntnis der mikroskopischen physikalischen Phänomene dieses Zustands allerdings nicht notwendig.

Die Ginzburg-Landau freie Energie im Fall zweier gekoppelter reeller Ordnungsparameter ϵ und ϕ lautet

$$F = \frac{1}{2}c_0\epsilon^2 - \lambda\epsilon\phi + \frac{1}{2}\chi_0^{-1}\phi^2 + \frac{B}{4}\phi^4$$

mit positiven Konstanten $c_0, \lambda, B > 0$ und temperaturabhängiger Größe $\chi_0^{-1} = A(T - T_0)$ mit $A > 0$. Der Ordnungsparameter ϵ beschreibe eine Deformation des Kristallgitters und ϕ ist der sogenannte nematische Ordnungsparameter. Die elastische Konstante $c_0 > 0$ beschreibt die Elastizität des Gitters in der Abwesenheit von ϕ . Die nematische Phase ist durch $\phi \neq 0$ charakterisiert und die normale Phase durch $\phi = 0$.

- (a) Die Werte der Ordnungsparameter ϵ und ϕ sind durch das globale Minimum der Funktion F festgelegt. Bestimmen Sie den Wert des nematischen Ordnungsparameters ϕ als Funktion der Parameter A, T_0, λ, c_0, B und T . Diskutieren Sie für welche Parameterwerte Sie die Lösung $\phi = 0$ und für welche die Lösung $\phi \neq 0$ erhalten.
- (b) Die vollständige elastische Kopplung $c = \frac{d^2 F}{d\epsilon^2} \Big|_{\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} = 0}$, die im Allgemeinen von c_0 wegen der Kopplung der beiden Ordnungsparameter ϵ und ϕ abweicht, kann experimentell gemessen werden. Drücken Sie c durch partielle Ableitungen der Funktion $F(\epsilon, \phi)$ aus. *Hinweis:* Sie dürfen folgenden Zusammenhang ohne Beweis verwenden

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} = 0} = - \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon \partial \phi} / \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}.$$

Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit des Verhältnisses c/c_0 in der normalen und der nematischen Phase.

- (c) In Abb. 1 ist das im Material BaFe_2As_2 experimentell gemessene Verhältnis c/c_0 gezeigt, wobei die beiden Kurven mit zwei unterschiedlichen experimentellen Methoden bestimmt wurde. Verwenden Sie die experimentellen Resultate, um die Temperatur bei der das System eine nematische Ordnung entwickelt abzuschätzen. Erklären Sie kurz wie Sie dabei vorgehen und warum.

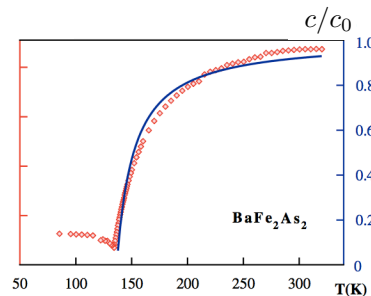


Abbildung 1: Elastizitätsmodulverhältnis c/c_0 (beide Kurven) von BaFe_2As_2 als Funktion der Temperatur T (Einheiten von (K)) aus Phys. Rev. Lett. **105**, 157003 (2010).