

Moderne Theoretische Physik III SS 15

Prof. Dr. A. Mirlin

Klausur, 100 Punkte + 35 Bonus Punkte

Dr. Una Karahasanovic, Dr. Ivan Protopopov

23.07.2015, 17:30 - 19:30 Uhr,
120 min

1. Kurzfragen

(5 + 10 + 15 + 15 + 5 = 50 Punkte + 15 Bonuspunkte)

- (a) Ein
- klassisches*
- Teilchen bewegt sich bei Temperatur
- T
- im folgenden Potenzial:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < -a \text{ oder } x > 2a \\ 0, & -a < x < 0, \\ V_0 > 0, & 0 < x < 2a. \end{cases} \quad (1)$$

Finde die Wahrscheinlichkeit p_L , das Teilchen links vom Ursprung ($x=0$) zu finden. Was ist dann die Wahrscheinlichkeit p_R , das Teilchen rechts davon zu finden? Bei welcher Temperatur gilt $p_R = p_L$?

- (b) Betrachte ein quantenmechanisches Teilchen auf einer Strecke der Länge L . Die Energieeigenwerte sind $E(n) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$, mit $n=1, 2, 3, \dots$. Bestimme die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität (für festes L) bei niedrigen ($k_B T \ll \hbar^2/mL^2$) sowie hohen ($k_B T \gg \hbar^2/mL^2$) Temperaturen.
- (c) Betrachte nun nichtwechselwirkende Fermionen mit einer quadratischen Dispersionsrelation $\epsilon(p) = p^2/2m$. Wie skaliert die Fermienergie E_F mit der Teilchendichte n in $d=2$ und $d=3$ Raumdimensionen (angenommen $E_F \propto n^\alpha$ – was ist jeweils der Exponent α ?) Wie skaliert die Wärmekapazität des Systems mit der Temperatur bei $T \ll E_F$ in $d=2$ und $d=3$?
- (d) Der Hamiltonoperator eines Spin-1-Isingmodells in einer Raumdimension lautet

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (2)$$

Dabei werden periodische Randbedingungen angenommen, $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$. Die Transfermatrix dieses Systems ist eine 3×3 -Matrix $\mathcal{T}$ mit Einträgen

$$\mathcal{T}_{\sigma\sigma'} = e^{\beta J \sigma \sigma'}. \quad (3)$$

Es gilt $\beta = 1/k_B T$. In unserem Modell können wir explizit angeben:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 & e^{-\beta J} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{-\beta J} & 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die drei Eigenwerte von $\mathcal{T}$ sind dann

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2 \sinh \beta J, \\ \lambda_{\pm} &= \frac{1}{2} + \cosh(\beta J) \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \cosh(\beta J) + \cosh^2(\beta J)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Leite einen Ausdruck für die Zustandssumme Z der geschlossenen Kette aus N Spins her, in dem die Transfermatrix $\mathcal{T}$ eingeführt wird. Drücke deine Antwort dann durch die Eigenwerte $\lambda_0, \lambda_-, \lambda_+$ zunächst für endliche N und dann im thermodynamischen Limes $N \gg 1$ aus. Wie verläuft die Wärmekapazität des Systems bei niedrigen Temperaturen $\beta J \gg 1$?

Hinweis: Beim Übergang zum thermodynamischen Limes kann verwendet werden, dass stets $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$ gilt.

- (e) Die Operatoren $\alpha^\dagger$ und $\beta^\dagger$ erzeugen Bosonen in zwei getrennten Einteilchen-Orbitalen; die entsprechenden Vernichtungsoperatoren sind α und β .

Eine Bogoliubov-Transformation wird definiert durch

$$\begin{aligned} a^\dagger &= u\alpha^\dagger + v\beta, \\ b^\dagger &= u\beta^\dagger + v\alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

dabei seien $u, v \in \mathbb{R}$. Bestimme daraus die Bedingung, die u und v erfüllen müssen, damit $a^\dagger$ und $b^\dagger$ ebenfalls voneinander unabhängige bosonische Operatoren sind.

Bonusaufgabe

- (f) Das Landaufunktional eines Antiferromagneten sei durch $\mathcal{F} = tM^2/2 + bM^4 + cM^6$ gegeben, mit dem Ordnungsparameter M (dieser heißt *staggered magnetization*). Der Koeffizient $c > 0$ ist konstant, aber die Koeffizienten t und b hängen von der Temperatur und der Stärke des anliegenden Magnetfelds ab. Hier beschränken wir uns auf den Halbraum $b < 0$ des Phasendiagramms unseres Systems. In diesem findet ein Phasenübergang 1. Ordnung unter Variation von t bei $t_c(b) = b^2/2c$ statt. Wir nehmen an, dass bei gegebenem anliegenden Magnetfeld nahe der kritischen Temperatur T_c die Koeffizienten des Landaufunktionalen approximiert werden können:

$$b \approx b_0 < 0 \text{ sowie } t \approx t_c(b_0) + \alpha(T - T_c).$$

Bestimme das Verhalten der Magnetisierung und der Entropie des Systems als Funktion der Temperatur in der Nähe von T_c .

2. Bosegas mit Potenzgesetz-Dispersionsrelation. (5 + 5 + 5 + 10 + 10 = 35 Punkte)

Wir befassen uns mit einem idealen Bosegas in 3 Raumdimensionen, dessen Dispersionsrelation einem allgemeinen Potenzgesetz $\epsilon(p) = \epsilon_0(p/p_0)^\alpha$ genügt. Dabei sind ϵ_0 und p_0 Konstanten der Einheit Energie bzw. Impuls und $\alpha > 0$ ist eine Zahl.

Bei dieser Übung könnte folgendes Integral hilfreich sein.

$$\int_0^\infty dx x^\beta e^{-x} = \Gamma(\beta + 1), \quad \beta > -1. \quad (7)$$

$\Gamma(x)$ ist die Eulersche Gammafunktion.

- (a) Gib die Teilchendichte n der Bosonen bei einer Temperatur T und einem chemischen Potenzial μ als Integral über den Impuls p an. Berechne die Zustandsdichte $\nu(\epsilon)$ und geh im Integral dazu über, über die Energie ϵ zu integrieren. Für die Dichte ist es nicht notwendig, die Integration über ϵ auszuführen.
- (b) Bei festem n und hoher Temperatur T ist das chemische Potenzial μ negativ und betragsmäßig groß. Bestimme die Abhängigkeit $\mu(n, T)$ in diesem Limes.

- (c) Berechne das großkanonische Potenzial $\Omega(\mu, T, V)$ des Systems bei hoher Temperatur.
- (d) Bestimme die Entropie $S(T, V, N)$ als Funktion von Temperatur, Volumen und Teilchenzahl in diesem Hochtemperaturlimes. Berechne die spezifische Wärmekapazität c_V des Systems. Vergleiche deine Antwort mit dem Gleichverteilungssatz.
- (e) Bei niedrigen Temperaturen kann in einem solchen System *Bosekondensation* auftreten. Untersuche die Konvergenz des Integrals über ϵ , welches in Teil a) für die Teilchendichte hergeleitet wurde. Zeige, dass in unserem Fall tatsächlich Bosekondensation für $\alpha < 3$ auftritt, aber nicht für $\alpha \geq 3$. Zeige außerdem, dass bei $\alpha < 3$ die Abhängigkeit der kritischen Temperatur von der Teilchendichte durch

$$T_c \propto n^\gamma \quad (8)$$

gegeben ist. Bestimme den Exponenten γ . Skizziere die Abhängigkeit des chemischen Potenzials bei fester Teilchendichte im Fall $\alpha < 3$.

3. Teilchen im Magnetfeld und Langevin Gleichung

(5 + 10 = 15 Punkte + 10 + 10 = 20 Bonuspunkte)

Betrachte ein Teilchen mit Ladung e und Masse m , das sich in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld B bewegt. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Teilchens mit $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Das Teilchen erfährt zudem die Reibungskraft $-m\gamma\vec{v} = -m\gamma(v_x, v_y)$ und die zufällige Langevin Kraft $\vec{\xi}(t) = (\xi_x(t), \xi_y(t))$ der Umgebung. Das Rauschen $\vec{\xi}(t)$ ist charakterisiert durch den Korrelator

$$\langle \xi_\alpha(t) \xi_\beta(t') \rangle = q \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad \alpha, \beta = x, y. \quad (9)$$

- (a) Schreibe die Langevin Gleichungen, die die Bewegung des Teilchens beschreiben, auf. Vereinfache die Langevin Gleichungen durch das Einführen von $a(t) = v_x(t) + i v_y(t)$ und $a^*(t) = v_x(t) - i v_y(t)$.

Hinweis: Für $a(t)$ und $a^*(t)$ sollten die Gleichungen folgende Form haben

$$m\dot{a} - im\Omega a + \gamma m a = \xi_x + i\xi_y, \quad (10)$$

$$m\dot{a}^* + im\Omega a^* + \gamma m a^* = \xi_x - i\xi_y. \quad (11)$$

Hier ist $\Omega = eB/m$ die Zyklotronfrequenz.

- (b) Wir nehmen an, dass das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe und am Ort $(0, 0)$ war. Löse die Langevin Gleichungen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Teilchens $\vec{v}(t)$.

Hinweis: Als Lösung für $a(t)$ sollte man zu folgendem Ergebnis kommen

$$a(t) = \frac{1}{m} \int_0^t d\tau (\xi_x(\tau) + i\xi_y(\tau)) e^{i\Omega(t-\tau) - \gamma(t-\tau)}. \quad (12)$$

Bonusaufgabe

- (c) Finde die Korrelationsfunktion $\langle v_\alpha(t)v_\beta(t') \rangle$.

Hinweis: Betrachte das Produkt $v_\alpha(t)v_\beta(t')$ und führe den Mittelwert über das zufällige Rauschen aus.

- (d) Studiere den Grenzwert der Gleichzeit-Korrelationsfunktion $\langle v_\alpha(t)v_\beta(t) \rangle$ für $t \rightarrow \infty$. Benutze dein Resultat um die Stärke q der Langevin Kraft mit der Temperatur der Umgebung zu verbinden.