KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Schriftliche Modulprüfung

Moderne Theoretische Physik III (Statistische Physik) SS 2016

Prof. Dr. A. Shnirman

PD Dr. B. Narozhny, Dr. P. Schad

26.07.2016

Bearbeitungszeit 120 Min., 100 Punkte

---

1. Heisenberg-Spins 20 Punkte

Zwei gekoppelte Heisenberg-Spins (beide sind Spin-$\frac{1}{2}$) in einem externen Magnetfeld $\vec{H}$ können durch den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = -J\hat{\vec{S}}_1\hat{\vec{S}}_2 - \vec{H}\left(\hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2\right) = -J\left(\hat{S}_1^x\hat{S}_2^x + \hat{S}_1^y\hat{S}_2^y + \hat{S}_1^z\hat{S}_2^z\right) - \vec{H}\left(\hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2\right) \tag{1}$$

beschrieben werden.

(a) Berechnen Sie die freie Enthalpie $G(T, \vec{H})$. (15 Punkte)

(b) Finden Sie die Magnetisierung $\vec{M}(T, \vec{H})$ (5 Punkte)

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Basis von 2-Spin-Zuständen am besten geeignet ist.

2. Ultrarelativistisches entartetes Fermigas 35 Punkte

Betrachten Sie ein entartetes ($k_B T \ll \epsilon_F$) Gas aus ultrarelativistischen Fermionen mit Spin $S = \frac{3}{2}$ in einem dreidimensionalen Volumen V. Die Energien sind $\epsilon(\vec{k}) = c\hbar|\vec{k}|$, die Dichte $n = \frac{N}{V}$ des Gases sei gegeben.

(a) Finden Sie die Fermienergie $\epsilon_F = \mu(T = 0)$. (5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ für Temperaturen $0 < T \ll T_F$. (15 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Wärmekapazität $c_{V,N}$ des Gases bei tiefen Temperaturen (bei konstantem V und N). (15 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie in (b) und (c) die Sommerfeld-Entwicklung.

Bitte wenden!

3. Bose-Einstein-Kondensation 20 Punkte

Untersuchen Sie für die folgenden bosonischen Systeme, ob unterhalb einer kritischen Temperatur $T_c > 0$ im thermodynamischen Limes Bose-Einstein-Kondensation auftritt:

(a) Photonen in einem Hohlraum mit Volumen V ($V \to \infty$), (5 Punkte)

(b) N massive, nichtrelativistische Bosonen in einer Dimension in einem harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2}\tilde{k}x^2$ mit $\tilde{k} > 0$ ($N \to \infty$), (7 Punkte)

(c) N Bosonen in einem Volumen V mit einer Zustandsdichte $\nu(\epsilon) \propto \epsilon^\alpha$. Für welche Werte des Exponenten α tritt Bose-Einstein-Kondensation auf? ($V \to \infty$, $N \to \infty$, $\frac{N}{V}$ =konstant) (8 Punkte)

Die Antworten müssen begründet werden.

Hinweis: Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl und dem chemischen Potential.

4. Landau-Theorie eines Ferromagneten 25 Punkte (+15 Bonuspunkte)

Der Phasenübergang zwischen paramagnetischer und ferromagnetischer Phase eines Ferromagneten kann durch ein Landau-Funktional der Form

$$F[\vec{m}] = \int dV \left[\frac{g_0}{2} \left(\frac{T - T_c}{T_c} |\vec{m}|^2 + \xi_0^2 (\nabla \vec{m})^2 + \frac{b}{2} |\vec{m}|^4 \right) - \vec{H}\vec{m} \right] \tag{2}$$

mit den Konstanten $g_0, \xi_0, b > 0$, der kritischen Temperatur T_c und der lokalen Magnetisierung $\vec{m}(\vec{r})$. Außerdem bezeichnet $\vec{H} = H_x \vec{e}_x$ ein externes Magnetfeld in x-Richtung. Die Teilaufgaben (a)-(c) beziehen sich auf die Molekularfeldnäherung.

(a) Betrachten Sie den Fall $\vec{H} = 0$. Finden Sie die Magnetisierung $|\vec{m}_0|$ in der Molekularfeldnäherung und skizzieren Sie $|\vec{m}_0|$ als Funktion von T in der Nähe des Phasenübergangs. (6 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Suszeptibilität $\chi_x = \left.\frac{\partial m_{0,x}}{\partial H_x}\right|_{H_x=0}$ und skizzieren Sie χ_x als Funktion von T in der Nähe des Phasenübergangs. (7 Punkte)

(c) Die Wärmekapazität c_V hat bei T_c einen Sprung Δc_V. Berechnen Sie Δc_V. (12 Punkte)

(d) (Bonusaufgabe) Finden Sie für $T > T_c$ die Korrektur zur Wärmekapazität c_V, die durch Fluktuationen von $\vec{m}$ generiert wird. Benutzen Sie die Gauß'sche Näherung für die Fluktuationen. (15 Bonuspunkte)