Theoretische Physik F

Lösung der Probeklausur

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2013

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

Überprüft von Dennis Roy

11. Juni 2013

Diese Lösung entstand aus einem Tutoriumsmitschrieb und erhebt keinerlei Anspruch auf Korrektheit. Sie ist nicht offiziell.

Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Moderne Theoretische Physik III SS 13

Prof. Dr. G. Schön
Dr. M. Marthaler, Dr. A. Poenicke

03.06.2013
Bearbeitungszeit 120 min

---

1. Thermodynamische Potentiale: **11 Punkte**

Wir betrachten ein ideales Gas, beschrieben durch die Zustandsgleichung $PV = Nk_BT$. Als Funktion der Temperatur und des Volumens ist die innere Energie gegeben durch $U = C_VT$, mit einer konstanten Wärmekapazität C_V. (Hinweis: N wird konstant gehalten.)

(a) (3 Punkte) Zeigen sie, dass bei konstant gehaltenem Volumen die Innere Energie als Funktion der Entropie geschrieben werden kann als

$$U(S,V) = U_0(V)e^{(S-S_0)/C_V}\,. \tag{1}$$

(b) (3 Punkte) Zeigen sie, dass bei konstant gehaltener Entropie die Innere Energie als Funktion des Volumens geschrieben werden kann als,

$$U(S,V) = U_0(S)\left(\frac{V_0}{V}\right)^{Nk_B/C_V}\,. \tag{2}$$

(c) (1 Punkt) Zeigen sie nun, dass die innere Energie als Funktion von S und V gegeben ist durch

$$U(S,V) \;=\; U_0\cdot\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{C_P}{C_V}-1}\cdot\exp\left\{\frac{S-S_0}{C_V}\right\}\,.$$

Sie können dabei ohne Beweis die Relation $C_P - C_V = Nk_B$ verwenden.

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie daraus $S(U,V)$ und zeigen sie, dass gilt

$$S(U,V) = S_0 + Nk_B\ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{C_V/Nk_B}\left(\frac{V}{V_0}\right)\right]\,. \tag{3}$$

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie aus $U(S,V)$ die Helmholtzsche freie Energie $F(T,V)$.

2. Gaussverteilung in 2 Dimensionen: **7 Punkte**

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Oszillators in 2 Dimensionen,

$$\rho(x,y) = \frac{\sqrt{3}m\omega^2}{2k_BT\pi} \exp\left[-\frac{m\omega^2}{2k_BT}\vec{v}^T\mathbf{A}\vec{v}\right] \tag{4}$$

mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

(a) (4 Punkte) Finden sie die Koordinaten $x' = x'(x,y)$ und $y' = y'(x,y)$ für die die Wahrscheinlichkeitsverteilung in zwei voneinander unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen zerlegt werden kann, $\rho(x,y) = \rho_{x'}(x')\rho_{y'}(y')$.

(b) (3 Punkte) Berechnen sie die Mittelwerte $\langle x^2 \rangle$ und $\langle y^2 \rangle$.
Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-k^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \quad , \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^2 \, e^{-k^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2k^3} \tag{6}$$

3. Langevin Gleichung: **7 Punkte**

Betrachten sie folgende Langevin-Gleichung für ein Brown'sches Teilchen:

$$m\dot{v} + m\gamma v = \xi(t) \tag{7}$$

dabei ist $\xi(t)$ eine Zufallskraft, die charakterisiert ist durch

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \;\; , \;\; \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = ae^{-b|t-t'|} . \tag{8}$$

(a) (2 Punkt) Zeigen sie, dass

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' e^{\gamma(t'-t)}\xi(t') \tag{9}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (7) ist.

(b) (5 Punkte) Berechnen sie $\langle v(t)v(t') \rangle$ für $t > t'$. Benutzen sie hierzu die Lösung für $v(t)$ aus Aufgabenteil (a) und $t_0 \to -\infty$.

4. Dichte Matrix: **5 Punkte**

Betrachten Sie zwei Spin-1/2 Teilchen die Gleichverteilt sind auf die Triplett Zustände $|\psi_1\rangle = |++\rangle$, $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$, und $|\psi_{-1}\rangle = |--\rangle$.

(a) (3 Punkte) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis von $|\sigma_1, \sigma_2\rangle$ d.h. $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$.

(b) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass uns nur der erste Spin als Messgrösse interessiert. Bestimmen Sie dessen reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin 'ausspuren': $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1',\sigma_2}$.

1. Aufgabe: Thermodynamische Potentiale

(a) Aus

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T = \frac{U}{C_V}$$

folgt sofort

$$\frac{\mathrm{dU}}{U} = \frac{\mathrm{dS}}{C_V}$$

da das Differential total ist, wenn V konstant ist. Durch Integration folgt die gewünschte Formel

$$U(V,S) = U_0(V)e^{\frac{S-S_0}{C_V}}$$

(b) Diesmal benutzen wir

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -P = -\frac{NKT}{V} = -\frac{NkU}{C_V V}$$

wobei wir die Beziehung $PV = NkT$ benutzt haben. Ein analoges Vorgehen zur (a) mit der Integration (wobei jetzt S konstant ist) führt auf die gewünschte Formel

$$U(V,S) = U_0(S)\left(\frac{V_0}{V}\right)^{Nk/C_V}$$

(c) Wir starten mit der Formel aus der (a):

$$U(V,S) = U_0(V)e^{\frac{S-S_0}{C_V}}$$

Die Funktion $U_0(V)$ ist dabei noch vom Volumen abhängig und beschreibt die innere Energie bei einem frei gewählten konstanten S_0. Diese können wir nach der (b) jedoch berechnen mit

$$U_0(V,S_0) = U_0(S_0)\left(\frac{V_0}{V}\right)^{Nk/C_V}$$

Dabei ist jetzt $U_0(S_0)$ eine Konstante, welche wir einfach als U_0 setzen. Wir erhalten also

$$U(V,S) = U_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{Nk/C_V} e^{\frac{S-S_0}{C_V}}$$

und damit die behauptete Formel, wenn wir $Nk/C_V = (C_P - C_V)/C_V = C_P/C_V - 1$ einsetzen.

(d) Um S zu berechnen, müssen wir einfach die Formel aus der (c) nach S auflösen und erhalten nach einfacher Mathematik und etwas Logarithmusregeln die gewünschte

Formel

$$S(U,V) = S_0 + Nk \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{C_V/Nk} \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]$$

(e) Wir starten mit der Formel

$$F = U - TS = C_V T - TS_0 + TNk \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{C_V/Nk} \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]$$

wobei wir die Ergebnisse von oben eingesetzt haben. Wichtig ist jetzt aber, dass F von T uns V abhängen soll und nicht noch zusätzlich von U (S_0, N, k und C_V sind Konstanten). Deshalb benutzen wir

$$\frac{U}{U_0} = \frac{T}{C_V} \frac{T_0}{C_V} = \frac{T_0}{T}$$

und erhalten damit unser Endergebnis

$$F(T,V) = C_V T - TS_0 - NkT \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{C_V/Nk} \left(\frac{V}{V_0} \right) \right]$$

2. Aufgabe: Gaussverteilung in 2 Dimensionen

(a) Um die Zerlegung durchführen zu können, müssen wir die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisieren. Nach einer einfachen Rechnung erhält man als Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ mit den dazugehörigen normierten Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalerweise schreibt man eine zweidimensionale Gaussfunktion in der Form

$$\rho(\vec{\lambda}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{B}}{(2\pi)^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{\lambda}^T \mathbf{B} \vec{\lambda} \right)$$

Wir setzen also jetzt

$$\mathbf{B} = \frac{m\omega^2}{kT} \mathbf{A}$$

und erhalten denn Tatsächlich die selbe Verteilung, wenn wir $\vec{\lambda} = \vec{v}$ setzen und erkennen, dass

$$\det \mathbf{B} = 3 \left(\frac{m\omega^2}{kT} \right)^2$$

gilt. Nun setzen wir

$$\mathbf{O} = (v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und haben damit eine Transformationsmatrix gebildet, welche die Matrix $\mathbf{B}$ nach Wahl diagonalisiert: $\mathbf{B} = \mathbf{ODO}^T$. Mit der diagonalisierten Matrix $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \frac{m\omega^2}{kT} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zerfällt die Exponentialfunktion in zwei getrennte Faktoren:

$$\rho(\vec{\lambda}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{B}}{(2\pi)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^T \mathbf{B} \vec{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{D}}{(2\pi)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^T \mathbf{ODO}^T \vec{\lambda}\right) = \rho_{x'} \rho_{y'}$$

da $\det \mathbf{O} = \pm 1$.

Wir setzen also

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{O}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

und erhalten damit nach Wahl

$$\rho_{x'} = \sqrt{\frac{\det \mathbf{D}_1}{(2\pi)^1}} \exp\left(-\frac{1}{2} x' D_1 x'\right) \qquad \rho_{y'} = \sqrt{\frac{\det \mathbf{D}_2}{(2\pi)^1}} \exp\left(-\frac{1}{2} y' D_2 y'\right)$$

und mit

$$D_1 = \frac{m\omega^2}{kT}\lambda_1 = 3\frac{m\omega^2}{kT} \qquad D_2 = \frac{m\omega^2}{kT}\lambda_2 = \frac{m\omega^2}{kT}$$

erhält man

$$\rho_{x'} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}\frac{m\omega^2}{kT}} \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{kT}(x')^2\right) \qquad \rho_{y'} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{m\omega^2}{kT}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y')^2\right)$$

(b) Nach dem 5 Übungsblatt ist für eine Gaussverteilung der Form

$$\rho(\vec{\lambda}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{B}}{(2\pi)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^T \mathbf{B} \vec{\lambda}\right)$$

die Korrelation gegeben durch

$$\langle \lambda_i \lambda_j \rangle = \mathbf{B}^{-1}_{ij}$$

Wir können also sofort angeben (da $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ jeweils nur eine 1×1-Matrix sind):

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{kT}{3m\omega^2} \qquad \langle y'^2 \rangle = \frac{kT}{m\omega^2}$$

Nach den Beziehungen oben erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{O} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x' - y' \\ x' + 2y' \end{pmatrix}$$

und damit

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{5} \left(4\langle x'^2 \rangle + \langle y'^2 \rangle - 4 \underbrace{\langle x'y' \rangle}_{=0} \right) = \frac{7}{15} \frac{kT}{m\omega^2} \qquad \langle y^2 \rangle = \frac{13}{15} \frac{kT}{m\omega^2}$$

wobei $\langle x'y' \rangle = 0$ gilt, da x' und y' nach Wahl unkorreliert sind.

3. Aufgabe: Langevin Gleichung

(a) Durch einfache Einsetzen erkennt man, dass $v(t)$ eine Lösung ist, wenn man beachtet, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x_0}^{x} \mathrm{dx}' f(x, x') = \int_{x_0}^{x} \mathrm{dx}' \, \frac{\partial f(x, x')}{\partial x} + f(x, x)$$

gilt. Dann ist nämlich

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \mathrm{dt}'(-\gamma) e^{\gamma(t-t')} \xi(t') + \xi(t)/m = -\gamma v + \xi(t)/m$$

(b) Es ist

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{a}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{dt}_1 \int_{-\infty}^{t'} \mathrm{dt}_2 \; e^{\gamma(t_1+t_2)} e^{-b|t_1-t_2|}$$

wenn man die Lösung aus der (a) einsetzt und die Form von $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$. Nach einer dreifachen Fallunterscheidung die ich gerade nicht gewillt bin, abzuTEXen, erhält man das Endergebnis

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{a}{m^2} \left[\frac{e^{\gamma(t'-t)} - e^{b(t'-t)}}{b^2 - \gamma^2} + \frac{e^{\gamma(t'-t)}}{\gamma(\beta + \gamma)} \right]$$

4. Aufgabe: Dichtematrix

Das gesamte System ist zu jeweils einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ in einem der folgenden Zustände

$$|\psi_1\rangle = |{+}{+}\rangle \qquad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle\right) \qquad |\psi_{-1}\rangle = |{-}{-}\rangle$$

(a) Der gesamte Dichteoperator ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{3}\left(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + |\psi_{-1}\rangle\langle\psi_{-1}|\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(|{+}{+}\rangle\langle{+}{+}| + |{-}{-}\rangle\langle{-}{-}| + \frac{1}{2}\left(|{+}{-}\rangle\langle{+}{-}| + |{+}{-}\rangle\langle{-}{+}| + |{-}{+}\rangle\langle{+}{-}| + |{-}{+}\rangle\langle{-}{+}|\right)\right)\end{aligned}$$

oder als Matrix

$$\rho = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei als Basis die Vektoren in folgender Reihenfolge gewählt wurden:

$$|{+}{+}\rangle \qquad |{+}{-}\rangle \qquad |{-}{+}\rangle \qquad |{-}{-}\rangle$$

(b) Wir spuren den zweiten Spin aus, wir führen also die Operation

$$\rho^{\text{red}} = \sum_{\varepsilon}(\mathbb{1} \otimes \langle\varepsilon|)\rho(\mathbb{1} \otimes |\varepsilon\rangle)$$

aus, wobei $\otimes$ das Tensorprodukt zwischen den beiden Spinräumen ist. Dies können wir entweder graphisch machen, wie in folgender Matrix schematisch (!!) angedeutet:

$$\rho = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{1/2} & 1/2 & \boxed{0} \\ \hline \boxed{0} & 1/2 & \boxed{1/2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \langle +_1|+_1\rangle & \langle -_1|+_1\rangle \\ \hline \langle +_1|-_1\rangle & \langle -_1|-_1\rangle \end{array}\right)$$

oder wir rechnen die Spur jeweils einfach aus. Jedenfalls erhält man

$$\rho^{\text{red}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung zur graphischen Variante: Es können nur solche Einträge in Betracht kommen, bei denen die zweite Spinkomponente im ket- und im bra in die selbe Richtung zeigt (die $\boxed{\text{eingekästelten}}$ Werte). Dann muss immer über die Werte summiert werden, für die die erste Spinkomponente jeweils gleich ist (alle Werte in einer Untermatrix). Somit erhält man die passenden Werte.