Universität Karlsruhe SS 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **19.05.04**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 5 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Lokalisierte Spins: Auf einem Kristallgitter sind N Atome fixiert, die je eine unabgeschlossene Schale mit Gesamtdrehimpuls (spin) 1/2 aufweisen. Im äußeren Magnetfeld B hat ein einzelnes Atom daher die Energie $\varepsilon_\sigma = -m\,B$, $m = \dfrac{g\mu_B}{2}\sigma$, $\sigma = +1, -1$
Geben Sie die Mikrozustände und die kanonische Zustandssumme des Systems an.
Berechnen Sie Magnetisierung $M = \sum_{i=1}^{N} \langle m_i \rangle$ und Suszeptibilität $\chi(T, N) = \left.\dfrac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0}$.

2 Ideales Boltzmann-Gas: In einem Würfel mit Volumen $V = L^3$ befindet sich ein Teilchen mit $\varepsilon(\mathbf{k}) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ unter periodischen Randbedingungen.

a) Zeigen Sie: $k_\mu = \dfrac{2\pi}{L} n_\mu$, $\mu = x, y, z$, $n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ und $\mathrm{d}^3 k = (2\pi)^3/V$.

b) Berechnen Sie für N Teilchen in der kanonischen Gesamtheit im thermodynamischen Limes $V \to \infty$ die Geschwindigkeitsverteilung $\rho(\mathbf{p})$ aus der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen 1 im Impulsraumelement $\mathrm{d}^3 p$ zu finden: $\rho(\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3 p = \sum_{\text{Mikrozust. }\alpha} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}_1} \dfrac{1}{Z} e^{-\beta E_\alpha}$.

3 Zustandsdichten:
Die Zustandsdichte ist in einem d-dimensionalen Würfel mit $V = L^d$ definiert als

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k})) \ , \quad \varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ \text{(Elektronen)} \ , \quad \varepsilon(\mathbf{k}) = c\hbar k \ \text{(Photonen)}$$

a) Zeigen Sie: Für $V \to \infty$ gilt $\mathcal{N}(\varepsilon) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$.

b) Berechnen Sie $\mathcal{N}(\varepsilon)$ für (i) Elektronen und (ii) Photonen in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen.

4 Ideales Fermi-Gas: Freie Elektronen mit Spin 1/2 im Volumen $V = L^3$ haben in einem äußeren Magnetfeld B die Dispersion $\varepsilon_\sigma(\mathbf{k}) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B B\,\sigma$, $\sigma = +1, -1$.

a) Geben Sie für die *großkanonische Gesamtheit* die Mikrozustände des Gases an, die Zustandssumme und das großkanonische Potential Ω .

b) Zeigen Sie, daß die Magnetisierung $M = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial B}$ gegeben ist durch

$$M(T, V, \mu, B) = \mu_B V \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon\, \mathcal{N}(\varepsilon) [\, f(\varepsilon - \mu - \mu_B B) - f(\varepsilon - \mu + \mu_B B)\,]$$

c) Berechnen Sie die *kanonische* Suszeptibilität $\chi(T, V, N) = \left.\dfrac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0}$ für $kT \ll \varepsilon_F$ bis zur Ordnung T^2 : $\chi(T) = \chi(0)[\,1 + a\,(kT/\varepsilon_F)^2\,]$, $\chi(0) = ?$, $a = ?$
Hinweis: $\chi = \chi(T, V, \mu)$, Sommerfeld-Entwicklung, $\mu = \mu(T, V, N)$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 25.05.04 —