Universität Karlsruhe SS 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle , Dr. Jan Brinckmann **26.05.04**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Ideales Bose-Gas:
Ein ideales Gas aus N bosonischen Teilchen befindet sich im Volumen V . Die Zustandsdichte der Ein-Teilchen-Energien ist

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k})) = C_3\sqrt{\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad C_3 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

a) Zeigen Sie, daß für hohe Temperaturen mit $-\mu \gg kT$ näherungsweise gilt

$$N(T,V,\mu) = V\frac{\sqrt{\pi}}{2}C_3(kT)^{3/2}\exp(\mu/kT) \quad , \quad U(T,V,N) = \frac{3}{2}NkT\,.$$

Bestimmen Sie dabei $\mu(T,V,N)$ und $c_V(T,V,N)$.

b) Nun sei $T \le T_0$, T_0 bezeichnet die Bose-Kondensationstemperatur.
Geben Sie $\mu(T,V,N)$ an. Zeigen Sie, daß

$$kT_0 = a\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad , \quad c_V(T,V,N) = b\cdot Nk\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad , \quad a,b = \text{c-Zahlen}$$

Hinweis: Zeta-Funktion: $\zeta(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^{z-1}}{e^x-1}$.

c) Es sei $T > T_0$, $(T-T_0) \to 0$.
Berechnen Sie $N(T,V,\mu)$ und daraus $\mu(T,V,N)$ für kleine $\delta t = (T-T_0)/T_0 \to 0$.
Ergebnis: $-\mu(T,V,N) = d\cdot kT_0(\delta t)^2$, $d =$ c-Zahl .
Hinweis: Ansatz: $N(T,\mu) = N(T,0) + \Delta N(T,\mu)$, $\Delta N(T,\mu) = [\,N(T,\mu) - N(T,0)\,]$.
In ΔN kann die Bosefunktion $g(E) \simeq \frac{kT}{E}$, $E = \varepsilon, (\varepsilon-\mu)$ genähert werden (warum ?).
Wie verläuft also $\mu(T,V,N)$ für $0 \le T < \infty$?

d) Zeigen Sie, daß $c_V(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}$ bei $T = T_0$ einen Knick aufweist,

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}c_V\right)\Big|_{T\searrow T_0} = \left(\frac{\partial}{\partial T}c_V\right)\Big|_{T\nearrow T_0} - \alpha \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad c_V|_{T\searrow T_0} = c_V|_{T\nearrow T_0}$$

Wie verläuft also $c_V(T,V,N)$ für $0 \le T < \infty$.

2 Pauli-Druck im idealen Fermi-Gas:
Ein Gas N fermionischer Punktteilchen befindet sich im Volumen V bei $T = 0$.

a) Berechnen Sie die Fermienergie $\varepsilon_F(V,N)$ für die Dispersion $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2k^2/(2m)$ über die Zustandsdichte und über das Volumen der Fermikugel.

b) Bestimmen Sie die innere Energie $U(V,N)$ über die Zustandsdichte und über eine Integration im k-Raum. Geben Sie den Druck $p(V,N) = -(\frac{\partial U}{\partial V})_N$ an.
Vergleichen Sie mit dem Boltzmann-Gas.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 01.06.04 —