Universität Karlsruhe SS 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **16.06.04**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Wechselwirkende Spins:
Das Ising-Modell zweier wechselwirkender Spins 1/2 auf Gitterplätzen 1 und 2 im Magnetfeld $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$ lautet $\hat{H} = -J\hat{S}_1^z\hat{S}_2^z - \mu B(\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z)$

a) Geben Sie die Eigenzustände und -energien von $\hat{H}$ an.

b) Man berechne die kanonische Zustandssumme $Z_K(T, B)$ und die Magnetisierung $M(T, B)$. Wie verläuft die Suszeptibilität $\chi(T) = \frac{\partial M}{\partial B}\Big|_{B=0}$ für $kT \ll J$ bzw. $kT \gg J$?

2 Zustandssumme im klassischen Grenzfall:
Man betrachte ein Gas aus N Teilchen im Volumen V in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$. Berechnen Sie den Effekt von $\mathbf{B}$ auf die *klassische* kanonische Zustandssumme $Z_K(T, \mathbf{B})$. Was bedeutet das Ergebnis?

3 Boltzmanngleichung in Relaxationszeitnäherung:
In einem Metall (Volumen V) befinden sich N nicht-wechselwirkende Elektronen mit Dispersion $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$. Im Gleichgewicht lautet die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})|_{Gleichgew.} = f^0 = [\,e^{(\varepsilon(\mathbf{p})-\mu)/kT} + 1\,]^{-1}$. Wird das Gleichgewicht durch ein zeitunabhängiges elektrisches Feld $\mathbf{E}$, einen Gradienten von Temperatur ∇T oder chemischem Potential $\nabla\mu$ gestört, so ist $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ bestimmt durch $\dfrac{\mathbf{p}}{m}\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - e\mathbf{E}\,\nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = I \;,\quad I = -\dfrac{1}{\tau}[\,f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - f^0\,]$.
$1/\tau$ ist die Streurate der Elektronen durch Störstellen im Metall.
Im Folgenden betrachten wir die Teilchendichte $n(\mathbf{r})$, elektrische Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und die Wärmestromdichte $\mathbf{j}_Q(\mathbf{r})$,

$$n = 2\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \;,\quad \mathbf{j} = -2e\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \;,\quad \mathbf{j}_Q = 2\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}}{m}[\,\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu\,] f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$$

a) Zeigen Sie, daß im Gleichgewicht gilt: $\mathbf{j}^0(\mathbf{r}) = 0 \;,\quad \mathbf{j}_Q^0(\mathbf{r}) = 0 \;,\quad n^0(\mathbf{r}) = N/V$.

b) In Gegenwart äußerer Felder ist nun $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}, T(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}))$.
Bestätigen Sie, daß in *linearer Ordnung* $\sim \mathbf{E}$, $\sim \nabla T$, $\sim \nabla\mu$ gilt:
$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f^0 + \tau\left(-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{p})}\frac{\mathbf{p}}{m}[\,-e\mathbf{E} - \nabla\mu - \frac{\varepsilon(\mathbf{p})-\mu}{T}\nabla T\,]$

c) Die elektrische Leitfähigkeit σ ist definiert über $j = \sigma E$ für $\nabla T = \nabla\mu = 0$. Wir betrachten $\mathbf{j}, \mathbf{E} || \mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j aus **b)** in führender Ordnung T, und zeigen Sie, daß $\sigma = n^0 e^2\tau/m$ (Drude-Leitfähigkeit).

d) Die thermische Leitfähigkeit K folgt aus $j_Q = -K\,\nabla T$ für $\mathbf{E} = \nabla\mu = 0$ (näherungsweise). Es sei $\mathbf{j}_Q, \nabla T || \mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j_Q in führender Ordnung T, und zeigen Sie, daß $K = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2\sigma T$ (Wiedemann–Franz-Gesetz).
Hinweis: $\int \mathrm{d}\varepsilon\, A(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\right) = A(\mu) + A''(\mu)\frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \;,\quad \mu(T) = \varepsilon_F + (\sim T^2)$

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 22.06.04 —