

Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Ising-Modell mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung:

Wir betrachten das Ising-Modell für N wechselwirkende Spins $1/2$ mit $\hat{S}_z|\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma|\sigma\rangle$, $\sigma = +1, -1$. Die Spins sind auf einem Gitter angeordnet, jeder Gitterplatz hat z nächste Nachbarn. In einem der Mikrozustände $\{\alpha\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N\}$ sind Energie $E_\alpha \equiv E$ und Magnetisierungsdichte $m_\alpha \equiv m$ gegeben durch

$$E = -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=(n.N., i)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (n.N., i) \equiv \text{nächster Nachbar von } i$$

$J > 0$ und h bezeichnen Wechselwirkungskonstante und externes Magnetfeld (in geeigneten Einheiten).

a) Näherung von Bragg und Williams (1934):

Setzen Sie $\sigma_i = (m + \Delta\sigma_i)$, $\Delta\sigma_i := (\sigma_i - m)$ in E ein, und zeigen Sie, daß $E(m, N) = -N[\frac{J}{2}z m^2 + h m]$, falls man Fluktuationsterme $\sim \Delta\sigma_i \Delta\sigma_j$ vernachlässigt.

b) Bestimmen Sie die Entropie $S(m, N) = k \ln(\Omega(M, N))$ für fest gewählte E, m, N .

Hinweis: $M = (N_+ - N_-)$, $N = (N_+ + N_-)$, Stirling: z.B.: $\ln(N_+!) \simeq N_+ \ln(N_+) + N_+$.

c) Geben Sie damit die freie Energie $F(T, m, N)$ an, und minimieren Sie F bezüglich m . Zeigen Sie, daß für $h = 0$ bei einer Temperatur T_c ein Phasenübergang $m = 0 \rightarrow m \neq 0$ stattfindet. Bestimmen Sie T_c .

Hinweis: $F(T, m, N) = N[-\frac{J}{2}z m^2 - h m + kT \frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + kT \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2}]$.

2 Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung:

Nimmt man an, daß die Wechselwirkung J jeden Spin mit jedem anderen auf dem Gitter verbindet, so lauten Energie und Magnetisierungsdichte im Mikrozustand $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$:

$$E(\{\sigma_i\}) = -\frac{J}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad m(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

a) Begründen Sie: In der kanonischen Gesamtheit ist $\langle(\Delta m)^2\rangle \propto \frac{1}{N}$ mit $\Delta m = (m - \langle m \rangle)$, und daher kann für $N \gg 1$ die Energie *ohne zu nähern* geschrieben werden als

$$E(\{\sigma_i\}) = -\tilde{h} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

Wie lautet das effektive Magnetfeld $\tilde{h}$?

b) Berechnen Sie nun $\langle m \rangle$ über die kanonische Zustandssumme, und zeigen Sie, daß das System einen magnetischen Phasenübergang macht. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T'_c .