

Übungsblatt Nr. 11 zur Theorie F (Statistische Physik)

- 1 Spinwellen:** Das ferromagnetische Heisenberg-Modell für N Spins der Länge S lautet

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|) \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \quad \hat{\mathbf{S}}_i^2 = \hbar^2 S(S+1), \quad [\hat{\mathbf{S}}_i, \hat{\mathbf{S}}_j]_{i \neq j} = 0, \quad J(0) = 0$$

Die Ortsvektoren $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_N$ bezeichnen die Positionen der Spins auf dem Gitter. Das Gitter mit Volumen $V = Na^3$ ist aus Würfeln der Kantenlänge a aufgebaut (einfach kubisch), es werden die üblichen periodischen Randbedingungen angenommen. Die Wechselwirkung $J(|\mathbf{R}|)$ hängt nur vom Abstand zweier Spins ab.

- a) Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung für einen Spin im Heisenberg-Bild lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{S}}_i(t) = \sum_j J(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|) \hat{\mathbf{S}}_i(t) \times \hat{\mathbf{S}}_j(t)$$

- b) In der ferromagnetisch geordneten Phase sind alle Spins in positive z -Richtung ausgerichtet, d.h., für $T \rightarrow 0$ darf man den Operator $\hat{S}^z$ durch seinen maximalen Eigenwert ersetzen, $\boxed{\hat{S}_i^z = \hbar S} \quad \forall i$. Stellen Sie damit eine linearisierte Bewegungsgleichungen für $\hat{S}^x(\mathbf{q}, t)$ und $\hat{S}^y(\mathbf{q}, t)$ auf, mit Hilfe der kanonischen Transformation $\hat{S}_i^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} \hat{S}^\mu(\mathbf{q}, t) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}_i)$. Es sollte die Dispersion $\Omega(\mathbf{q})$ auftauchen,

$$\Omega(\mathbf{q}) = \hbar S [\tilde{J}(0) - \tilde{J}(\mathbf{q})], \quad \tilde{J}(\mathbf{q}) = \sum_l J(|\mathbf{R}_l|) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_l}$$

- c) Prüfen Sie damit nach, daß die Leiteroperatoren $\hat{S}^\pm(\mathbf{q}) = \hat{S}^x(\mathbf{q}) \pm i\hat{S}^y(\mathbf{q})$ als Erzeuger/Vernichter elementarer Oszillator-Anregungen ("Spinwellen") fungieren,

$$\hat{S}_i^z = \hbar S \rightarrow \begin{cases} [\hat{a}_{\mathbf{q}}, \hat{H}] = \hbar \Omega(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{q}} \\ [\hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger, \hat{H}] = -\hbar \Omega(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \end{cases}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{q}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = 1, \quad \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger = \frac{\hat{S}^-(\mathbf{q})}{\sqrt{2S\hbar}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{q}} = \frac{\hat{S}^+(-\mathbf{q})}{\sqrt{2S\hbar}}$$

Hinweis: Natürlich gilt $\hat{S}^\mu(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{S}_i^\mu \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{R}_i)$.

Wie kann man also den Hamiltonoperator $\hat{H}$ schreiben?

- d) Machen Sie sich eine Spinwelle anschaulich klar, indem Sie einen 1-Spinwellen-Zustand $|\varphi_1(\mathbf{q})\rangle = \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger |\varphi_0\rangle$ explizit anschreiben. Stellen Sie zunächst den normierten ferromagnetischen Grundzustand (Produktzustand) $|\varphi_0\rangle$ mit $\hat{S}_i^z |\varphi_0\rangle = \hbar S |\varphi_0\rangle \quad \forall i$ auf. Bestimmen Sie $\langle \varphi_1(\mathbf{q}) | \varphi_1(\mathbf{q}) \rangle$, $\langle \varphi_0 | \varphi_1(\mathbf{q}) \rangle$, $\langle \varphi_0 | \hat{S}_i^z | \varphi_0 \rangle$, $\langle \varphi_1(\mathbf{q}) | \hat{S}_i^z | \varphi_1(\mathbf{q}) \rangle$, $i = \text{bel.}$
- e) Berechnen Sie $\Omega(\mathbf{q})$ für eine Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn im kubischen Gitter, d.h., $J(|\mathbf{R}_l|) = J$ für $\mathbf{R}_l = a(n_x, n_y, n_z)$ mit $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = 1$ und $J(|\mathbf{R}_l|) = 0$ für andere $\mathbf{R}_l$. Was ergibt sich für kleine Wellenvektoren $qa \ll 1$?