Universität Karlsruhe SS 2005
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Peter Schmitteckert **31.05.05**
http:/www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre peter@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochhaus Zi. 10.17

Übungsblatt Nr. 8 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Zustandsgleichung idealer Fermi- und Bose-Gase bei hohen Temperaturen.
Zeigen Sie, daß sich die thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases von Fermionen (Bosonen) in 3D bei hohen Temperaturen in der Form

$$p = nkT\{1 + B(T)n + \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)\}$$

mit dem Virialkoeffizienten

$$B(T) = \pm\frac{\lambda_T^3}{2^{5/2} g_s}$$

schreiben läßt.

Hierbei ist n die Teilchendichte, $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$ die thermische deBroglie-Wellenlänge, und $g_s = 2s + 1$ die Spinentartung.

Hinweis: Hohe Temperaturen bedeutet $z \equiv \exp(\frac{\mu}{kT}) \ll 1$. Entwickeln Sie $pV = -K(T, V, \mu)$ und $N = -\partial K/\partial\mu$ nach dem kleinen Parameter z und eliminieren Sie z aus beiden Gleichungen. Teilergebnisse aus Aufgabe 3, Blatt 7 können verwendet werden.

2 Bose-Gas in 2D.
Betrachten Sie ein ideales, zwei-dimensionales Bose-Gas mit Flächendichte $n = N/A$ und konstanter Zustandsdichte $D(\epsilon) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$.

a) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T)$. Diskutieren Sie das Verhalten bei tiefen und hohen Temperaturen und skizzieren Sie $\mu(T)$. Tritt eine Bose-Einstein Kondensation auf? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Berechnen Sie die Wärmekapazität $C_{A,N}$ bei konstanter Fläche A und Teilchenzahl N sowohl für tiefe als auch für hohe Temperaturen. (Berücksichtigen Sie beim differenzieren, daß μ von T abhängt.)

Hinweis: Bose Integrale:

$$B_\nu(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\alpha} - 1}\mathrm{dx},\ \alpha \le 0,\ \nu \ge 1.$$

$$\frac{\partial B_\nu(\alpha)}{\partial\alpha} = (\nu - 1)B_{\nu-1}(\alpha),\ B_1(\alpha) = -\ln(1 - e^\alpha),\ B_\nu(\alpha) = \Gamma(\nu)\zeta(\nu),\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

3 Modell für weiße Zwerge
Als weißen Zwerg bezeichnet man das Endstadium eines Sterns mittlerer Maße (also z.B. unsere Sonne), welches erreicht wird nachdem der Stern seinen nuklearen Brennstoff vollständig aufgebraucht hat. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nichtwechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der für Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Sterns durch Gravitation sorgt. Ein typischer weißer Zwerg hat eine Elektronendichte $n = 10^{30}\mathrm{cm}^{-3}$ und die Masse $M = 10^{30}\mathrm{kg}$. (Dies entspricht ungefähr der halben Sonnenmasse $M_\odot = 1.986 \cdot 10^{30}\mathrm{kg}$.) Wegen der hohen Dichte bewegt sich ein großer Anteil der Elektronen relativistisch, d.h. es gilt die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(p) = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$.

a) Berechnen Sie den Fermi-Impuls p_F des Elektronengases in Abhängigkeit von der Elektronendichte n. Schätzen Sie ab, oberhalb welcher Dichte n sich die Elektronen relativistisch bewegen, d.h. $p_F > mc$.

b) Die Temperatur eines (jungen) weißen Zwerges beträgt etwa 10^7K. Berechnen Sie die Fermienergie ϵ_F des Elektronensystems für die angegebene Dichte des Elektronengases und zeigen Sie $\epsilon \ll kT$. Im folgenden setzen wir $T = 0$.

c) Berechnen Sie die innere Energie U des Elektronensystems in Abhänigkeit vom Radius R des weißen Zwergs (1) im nichtrelativistischen Fall ($p_F \ll mc$) und (2) im ultrarelativistischen Fall ($p_F \gg mc$). Verwenden Sie dabei die Energie-Impuls-Beziehungen

$$\begin{aligned} \epsilon(p) = &\ mc^2 + \tfrac{p^2}{2m} \quad \text{(nichtrelativistisch)} \\ \epsilon(p) = &\ cp \quad \text{(ultrarelativistisch).} \end{aligned}$$

d) Geben Sie den Druck $P = -(\partial U/\partial V)_N$ des Elektronensystems an. Dieser Druck heißt "Pauli-Druck".

e) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie des $E(R) = U + E_{\mathrm{Grav}}$ des Sterns, mit $E_{\mathrm{Grav}} = -GM^2/R$. Skizzieren Sie $E(R)$ und beachten Sie dabei die Näherungen: Nichtrelativistisch für niedrigen Druck (großes R) und ultrarelativistisch für hohen Druck (kleines R). Was ist (qualitativ) die Bedingung an $E(R)$, daß ein Radius R existiert bei dem der Stern stabil ist? Zeigen Sie, daß der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann. Bestimmen Sie M_c. M_c heißt nach ihrem Entdecker Chandrasekhar Masse. Ist $M > M_c$ kontrahiert der Stern weiter und endet als Neutronenstern.

Hinweis:
$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ kg m^2 s^{-1}
$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ kg m^2 s^{-2} K^{-1}
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg (Elektronenmasse)

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 7.06.05 —