UNIVERSITÄT KARLSRUHE SS 2005
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Peter Schmitteckert **07.06.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre peter@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochhaus Zi. 10.17

Übungsblatt Nr. 9 (korrigiert) zur Theorie F (Statistische Physik)

$\boxed{1}$ Zustandsoperator I

Der Zustandsoperator ("Dichtematrix") eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems lautet im allgemeinen Fall

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix},$$

mit $0 \le a \le 1$ und b komplex.

a) Drücken Sie die Erwartungswerte $\langle\langle\hat{\sigma}_x\rangle\rangle$, $\langle\langle\hat{\sigma}_y\rangle\rangle$ und $\langle\langle\hat{\sigma}_z\rangle\rangle$ durch die drei rellen Zahlen a, $b' = \mathrm{Re}\, b$ und $b'' = \mathrm{Im}\, b$ aus.

b) Gemessen seien $\langle\langle\hat{\sigma}_x\rangle\rangle = 0$, $\langle\langle\hat{\sigma}_y\rangle\rangle = \frac{4}{5}$, $\langle\langle\hat{\sigma}_z\rangle\rangle = \frac{3}{5}$. Wie lautet der Zustandsoperator?

c) Beschreibt b) einen reinen oder einen gemischten Zustand?

$\boxed{2}$ Zustandsoperator II

Gegeben sei ein gemischter Zustand aus den Eigenzuständen $|\uparrow_z\rangle$ des Spin-$\frac{1}{2}$ Operators in z-Richtung und $|\uparrow_x\rangle$ des Spin-$\frac{1}{2}$ Operators in x-Richtung mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $p = 0.5$.

a) Bestimmen Sie $|\uparrow_x\rangle$ in der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$.

b) Wie lautet der Zustandsoperator $\hat{W}$ in Matrixdarstellung bzgl. der Eigenzustände von $\hat{\sigma}_z$?

c) Bestimmen Sie die Eigenzustände von $\hat{W}$ in der Basis der Eigenzustände von $\hat{\sigma}_z$.

d) Berechnen Sie die Entropie $S = -k_\mathrm{B}\,\mathrm{Sp}\left[\hat{W}\,\ln\hat{W}\right]$.

$\boxed{3}$ Heisenbergbild

a) Bestimmen Sie den Ortsoperator $\hat{x}(t)$ und den Impulsoperator $\hat{p}(t)$ im Heisenbergbild für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+ a + \frac{1}{2}).$$

Hinweis: Heisenbergsche Bewegungsgleichungen: $\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \mathcal{H}]$.

b) Berechnen Sie die Zustandssumme Z für den harmonischen Oszillator:

$$Z = \sum_n \langle n|\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|n\rangle,$$

mit $\mathcal{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$.

c) Berechnen Sie:

$$\frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hat{x}(t)\hat{x}(0)\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}|n\rangle.$$

Hinweis: Einschieben der $\mathbf{1} = \sum_m |m\rangle\langle m|$. Geometrische Reihe.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 14.06.05 —