

Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Matrizenregeln

Zeigen Sie, dass für beliebige quadratische endliche komplexe Matrizen A , B , C und invertierbare U gilt: $\text{Sp}(A \cdot B) = \text{Sp}(B \cdot A)$, $\text{Sp}(A \cdot B \cdot C) = \text{Sp}(C \cdot A \cdot B)$ und $\text{Sp}(U^{-1} \cdot A \cdot U) = \text{Sp}(A)$.

2 Störungsrechnung: Der anharmonische Einstein-Festkörper

Im anharmonischen Einstein-Festkörper werden kleine Störungen der harmonischen Schwingungen des Gitters durch eine Entwicklung des Potentials um das Potentialminimum beschrieben:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{g_3x^3 + g_4x^4}_{g\hat{V}}.$$

Teil I: Störungsrechnung:

- Berechnen Sie die erste störungstheoretische Korrektur zur freien Energie. Hinweis: $gF_1 = \text{Sp}(\hat{W}_0 g\hat{V})$. Verwenden Sie Auf- und Absteigeoperatoren.
- Berechnen Sie die zu a) gehörende Entropie und Wärmekapazität für tiefe Temperaturen, d.h. berücksichtigen sie führende Ordnungen bis inklusive $e^{-\beta\hbar\omega}$.

Teil II: Variationsrechnung:

- Approximieren Sie $\mathcal{H}$ durch ein effektives harmonisches Problem mit $\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}x^2$. Bestimmen Sie zunächst $Z_{\text{eff}} = \text{Sp}(e^{-\beta\mathcal{H}_{\text{eff}}})$ und $\hat{W}_{\text{eff}} = e^{-\beta\mathcal{H}_{\text{eff}}}/Z_{\text{eff}}$.

- Bestimmen Sie nun

$$\tilde{F} = -k_B T \ln Z_{\text{eff}} + \text{Sp} \left(\hat{W}_{\text{eff}} (\mathcal{H} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \right).$$

- Wie findet man ein bestmögliches Ω ?