Universität Karlsruhe SS 2005
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Peter Schmitteckert **21.06.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre peter@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochhaus Zi. 10.17

Übungsblatt Nr. 11 zur Theorie F (Statistische Physik)

1 Ising-Modell mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung:

Wir betrachten das Ising-Modell für N wechselwirkende Spins 1/2 mit $\hat{S}_z|\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma|\sigma\rangle$, $\sigma = +1, -1$. Die Spins sind auf einem Gitter angeordnet, jeder Gitterplatz hat z nächste Nachbarn. In einem der Mikrozustände $\{\alpha\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_N\}$ sind Energie $E_\alpha \equiv E$ und Magnetisierungsdichte $m_\alpha \equiv m$ gegeben durch

$$E = -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=(n.N.\,i)}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad , \quad m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad , \quad (n.N.\,i) \equiv \text{nächster Nachbar von } i$$

$J > 0$ und h bezeichnen Wechselwirkungskonstante und externes Magnetfeld (in geeigneten Einheiten).

a) *Näherung von Bragg und Williams (1934):*
Setzen Sie $\sigma_l = (m + \Delta\sigma_l)$, $\Delta\sigma_l := (\sigma_l - m)$ in E ein, und zeigen Sie, daß $E(m,N) = -N[\,\frac{J}{2}z\,m^2 + h\,m\,]$, falls man Fluktuationsterme $\sim \Delta\sigma_i\Delta\sigma_j$ vernachlässigt.

b) Bestimmen Sie die Entropie $S(m,N) = k\ln(\Omega(M,N))$ für fest gewählte E, m, N .
Hinweis: $M = (N_+ - N_-)$, $N = (N_+ + N_-)$, Stirling: z.B.: $\ln(N_+!) \simeq N_+\ln(N_+) + N_+$.

c) Geben Sie damit die freie Energie $F(T,m,N)$ an, und minimieren Sie F bezüglich m .
Zeigen Sie, daß für $h = 0$ bei einer Temperatur T_c ein Phasenübergang $m = 0 \to m \neq 0$ stattfindet. Bestimmen Sie T_c .
Hinweis: $F(T,m,N) = N[\,-\frac{J}{2}z\,m^2 - h\,m + kT\,\frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2} + kT\,\frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2}\,]$.

2 Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung:

Nimmt man an, daß die Wechselwirkung J jeden Spin mit jedem anderen auf dem Gitter verbindet, so lauten Energie und Magnetisierungsdichte im Mikrozustand $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$:

$$E(\{\sigma_i\}) = -\frac{J}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad , \quad m(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

a) Begründen Sie: In der kanonischen Gesamtheit ist $\langle(\Delta m)^2\rangle \propto \frac{1}{N}$ mit $\Delta m = (m - \langle m\rangle)$, und daher kann für $N \gg 1$ die Energie *ohne zu nähern* geschrieben werden als

$$E(\{\sigma_i\}) = -\tilde{h}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$$

Wie lautet das effektive Magnetfeld $\tilde{h}$?

b) Berechnen Sie nun $\langle m\rangle$ über die kanonische Zustandssumme, und zeigen Sie, daß das System einen magnetischen Phasenübergang macht. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur T_c' .

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 28.06.05 —

Klausur:
5. Juli 2005 im Gerthsen-Hörsaal von 15:30 - 17:30.
Hilfsmittel: Eine handbeschriebene DIN A4 Seite (beidseitig ok).