

Präsenzübung zu Theorie F: Statistische Physik Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Do. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 02.05.2006 in den Übungen

Aufgabe 1

Integrabilitätsbedingung:

Eine Form

$$\delta\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

heißt integrabel wenn eine Funktion $h(x, y)$ existiert, deren vollständiges Differential dh identisch mit $\delta\omega$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_y$$

erfüllt ist. Im Falle von nur zwei unabhängigen Variablen kann man immer einen integrierenden Faktor $\alpha(x, y) \neq 0$ finden, so daß die Form $\alpha\delta\omega$ integrabel ist.

Testen Sie, ob für die folgenden Fälle

- a) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy - y^2$ und $g(x, y) = -x^2 - 2xy + y^2$,
- b) $f(x, y) = 3x + y$ und $g(x, y) = -x - 3y$,

$\delta\omega$ integrabel ist, und bestimmen Sie $h(x, y)$. Finden Sie dazu im Falle einer nichtintegrablen Form einen geeigneten integrierenden Faktor $\alpha(x, y)$ (Ansatz: $\alpha(x, y) = Ax + By$).

Aufgabe 2

Legendretransformation:

Gegeben sei eine Kurve $U(S)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Geben Sie eine eindeutige Darstellung der Kurve, indem Sie anstelle der Koordinaten S und U die Steigung $T = dU/dS$ sowie den U -Achsenabschnitt F der Tangente an jeden Kurvenpunkt als unabhängige Variable verwenden. Die Funktion $F(T)$ heißt Legendretransformierte zu $U(S)$. Auflösen der (obigen) Beziehung $T = T(S)$ nach S definiert eine Funktion $S = S(T)$.

- a) Zeigen Sie, daß die vollständigen Differentiale der Kurve und ihrer Legendretransformierten durch

$$dU(S) = T(S)dS \qquad dF(T) = -S(T)dT$$

gegeben sind.

- b) Gegeben sei nun eine Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S , negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendretransformation für konstant gehaltenes V bzw. für konstant gehaltenes S durch. Die Steigungen seien durch $T = \partial U / \partial S|_V$ sowie $-P = \partial U / \partial V|_S$ gegeben. Auflösen von $T(S, V)$ nach S und $P(S, V)$ nach V definiert Funktionen $S(T, V)$ und $V(S, P)$. Bestimmen Sie analog zu oben die vollständigen Differentiale der Legendretransformierten $F(T, V)$ und $H(S, P)$. Die Funktionen $U(S, V)$, $F(T, V)$ und $H(S, P)$ entsprechen der inneren Energie, der freien Energie und der Enthalpie.

Aufgabe 3

Funktionaldeterminantenkalkül:

Seien $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Funktionen der unabhängigen Variablen x und y . Als Funktionaldeterminante bezeichnet man das Gebilde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, x)} & \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}}. \end{aligned}$$

- b) Es sei nun ein funktionaler Zusammenhang zwischen x und y durch $\phi(x, y) = \text{const} = z$ gegeben, der eine Abhängigkeit $y = y(x)$ herstellt. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_\phi = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_\phi \right)^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_\phi = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_y}{\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_x}.$$

(Bem.: Oft schreiben wir in obigen Beziehungen einfach $z = z(x, y)$ und ersetzen ϕ überall durch z).

- c) Wir betrachten nun drei Variablen, die eine Bedingung $F(x, y, z) = 0$ erfüllen, sowie zwei der Variablen eine weitere Bedingung $w = w(x, y)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial x}{\partial w} \Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \cdot \frac{\partial y}{\partial w} \Big|_z \quad \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_w + \frac{\partial x}{\partial w} \Big|_y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_z$$