

3. Übung zu Theorie F: Statistische Physik Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön — Priv.Do. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 23.05.2006 in den Übungen

Aufgabe 7

(3 Punkte)

Gaußverteilung für mehrere Variablen:

Die Gaußverteilung $\rho(\xi_1, \dots, \xi_M)$ für die stochastischen Variablen $\xi_1, \dots, \xi_M$ sei definiert durch

$$\rho(\xi_1, \dots, \xi_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M \xi_i A_{ij} \xi_j\right). \quad (1)$$

Beweisen Sie die Beziehung (β sei eine reelle Konstante)

$$\left\langle \exp\left(i\beta \sum_{k=1}^M \xi_k\right) \right\rangle = \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \sum_{i,j=1}^M \langle \xi_i \xi_j \rangle\right). \quad (2)$$

Aufgabe 8

(7 Punkte)

Gaußverteilung für zeitabhängige stochastische Variablen:

Wir wollen nun eine zeitabhängige stochastische Variable $\xi(t)$ im Zeitintervall $[0, \tau]$ betrachten. Man sagt, $\xi(t)$ sei Gauß-verteilt, wenn die Verteilungsfunktion für die Funktion $\xi(t)$ durch

$$\rho(\{\xi(t)\}) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \xi(t) g^{-1}(t-t') \xi(t')\right). \quad (3)$$

gegeben ist.

- a) Um eine Interpretation für obige Verteilungsfunktion zu finden, diskretisieren Sie die Zeit in M Zeitintervalle Δt . Bringen Sie die diskretisierte Verteilungsfunktion in die Form der Gleichung (1). (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\left\langle \exp\left(i \int_0^\tau dt \xi(t)\right) \right\rangle, \quad (4)$$

indem Sie die diskretisierte Version benutzen und danach das Ergebnis wieder durch kontinuierliche Integrale ausdrücken. (2 Punkte)

- c) Berechnen Sie $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle$. Finden Sie daraus eine physikalische Interpretation für die Größe $g(t-t')$. Unter welchen Umständen ist die Diskretisierung der Zeit eine gute Näherung? (3 Punkte)

Aufgabe 9

(15 Punkte)

Schrotrauschen:

Zwei metallische Leiter 1 und 2 seien durch eine dünne isolierende Schicht voneinander getrennt. Stromfluss von einem Leiter zum anderen ist möglich, da es wegen quantenmechanischen Tunnelns eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür gibt, dass Elektronen die isolierende (und damit klassisch verbotene) Schicht überwinden. Die Zahl $n(\tau)$ der Elektronen, die innerhalb eines Zeitintervalls $[0, \tau]$ die Barriere vom Leiter 1 kommend durchtunneln, ist im Grenzfall kleiner Tunnelwahrscheinlichkeit mit dem Parameter Γ_{12} Poisson-verteilt. Der Strom ist eine stochastische Variable gegeben durch

$$I(t) = e \sum_{j=1}^{n(\tau)} \delta(t - t_j) \quad , \quad (5)$$

mit über dem Intervall $[0, \tau]$ gleichverteilten stochastischen Variablen t_j . Mittelwertbildung erfolgt demnach durch die Vorschrift

$$\langle X(t) \rangle = e^{-\tau \Gamma_{12}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^n}{n!} \int_0^{\tau} dt_1 \dots \int_0^{\tau} dt_n X(t, t_1, \dots, t_n). \quad (6)$$

- a) Bestimmen Sie den mittleren Strom $\langle I(t) \rangle$. Finden Sie eine vom Ergebnis nahegelegte physikalische Interpretation für den Parameter Γ_{12} . (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie $\langle I(t) I(t') \rangle$. Das Ergebnis sagt etwas über Korrelationen der Stromfluktuationen $\delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$ (Rauschen!) aus. Interpretieren Sie! (3 Punkte)
- c) Verallgemeinern Sie die Rechnungen in (a,b) für den Fall, dass Elektronen auch in die Gegenrichtung (Parameter: Γ_{21}) tunneln können. Was können Sie über das Rauschen mehrerer statistisch unabhängiger Rauschquellen aussagen? (6 Punkte)
- d) Eine Spannung V sei am Tunnelkontakt angelegt, so dass das chemische Potential im Leiter 1 um eV über dem des Leiters 2 liegt. Benutzen Sie die aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts folgende Beziehung $\Gamma_{12}/\Gamma_{21} = \exp(eV/kT)$, um für einen ohmschen Kontakt ($\langle I \rangle = V/R$) die Parameter Γ_{12} und Γ_{21} durch V und R auszudrücken. Berechnen Sie damit die Spektraldichte $S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \delta I(t) \delta I(0) \rangle$ des Rauschens als Funktion von V und T und diskutieren Sie den Grenzfall $kT \gg eV$. (4 Punkte)