4. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 30.05.2006 in den Übungen

Aufgabe 10 (16 Punkte)

Quantenmechanische "Full Counting Statistics":

Wir betrachten die Anzahl von Elektronen, die einen Kontakt zwischen zwei metallischen Leitern 1 und 2 passieren, wobei Energie und Spin erhalten bleibe (elastische Streuung). $\rho(N)$ sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür, dass N Elektronen im einem festen Zeitintervall τ den Kontakt passieren. Die zugehörige charakteristische Funktion $\Phi(\chi) = \langle e^{iN\chi} \rangle = \sum_N e^{iN\chi}\rho(N)$ erzeugt die Momente $M_n = \langle N^n \rangle$ über die Formel $M_n = (-i\partial_\chi)^n \Phi(\chi)|_{\chi=0}$ (siehe Vorlesung). Die Variable χ wird Zählfeld genannt, und die entsprechende Statistik nannt man die vollständige Zählstatistik. Der sogenannte Kumulantengenerator $S(\chi) = \ln \Phi(\chi)$ erzeugt die Kumulanten $C_n \equiv \langle\langle N^n \rangle\rangle$ über $C_n = (-i\partial_\chi)^n S(\chi)|_{\chi=0}$. Für unkorrelierte Prozesse addieren sich die $S(\chi)$, während für perfekt korrelierte Prozesse die $\Phi(\chi)$ addiert werden.

Elektronen mit verschiedener Energie (oder verschiedenem Spin) passieren den Kontakt unkorreliert. Somit ergibt sich $S(\chi)$ als ("Levitov-Formel")

$$S(\chi) = 2\sum_{\epsilon_i} S_{\epsilon_i}(\chi) \approx 2\int \frac{d\epsilon\, dt}{2\pi\hbar} S_\epsilon(\chi) = \frac{2\tau}{h}\int d\epsilon\; S_\epsilon(\chi)$$

mit $S_\epsilon(\chi) = \ln \Phi_\epsilon(\chi)$, wobei ϵ die Energie gemessen vom chemischen Potential ist. Eine mikroskopische Rechnung ergibt für Φ_ϵ

$$\Phi_\epsilon(\chi) = (1-f_1)(1-f_2) + [\mathcal{R} + \mathcal{T}e^{i\chi}]f_1(1-f_2) + [\mathcal{R} + \mathcal{T}e^{-i\chi}]f_2(1-f_1) + f_1 f_2$$

mit Transmissionswahrscheinlichkeit $\mathcal{T}$ und Reflektionswahrscheinlichkeit $\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T}$. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten in den Metallen 1 und 2 sind durch $f_1 \equiv f_1(\epsilon) = f(\epsilon - eV)$, $f_2 \equiv f_2(\epsilon) = f(\epsilon)$ gegeben, wobei $f(\epsilon) = (1 + \exp[\frac{\epsilon}{k_B T}])^{-1}$ ("Fermiverteilungsfunktion"). V ist die angelegte Spannung und T die Temperatur.

a) Interpretieren Sie physikalisch die vier Summanden im Ausdruck für $\Phi_\epsilon(\chi)$. Beachten Sie dabei das Pauliprinzip. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie den Stromkorrelator $\langle\langle I^2 \rangle\rangle = e^2 C_2/\tau$ als Funktion von T und V (die Integrale über ϵ können ausgeführt werden). Betrachten Sie die Grenzfälle $eV \ll k_B T$ (thermisches Rauschen, Nyquist) und $eV \gg k_B T$ (Schrotrauschen, Schottky). (3 Punkte)

c) Betrachten Sie den Fall $T = 0$, $eV > 0$. Der Parameter $M = \frac{2\tau}{h} eV$ sei ganzzahlig und beschreibt die maximale Anzahl von Elektronen die im Zeitintervall τ passieren können ("number of attempts"). Berechnen Sie für diesen Fall $\Phi(\chi)$ sowie $\rho(N) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\chi}{2\pi} e^{-iN\chi}\Phi(\chi)$. Zeigen Sie, dass sich eine binomiale Zählstatistik ergibt. Berechnen Sie die Kumulanten C_1, C_2 und C_3. (4 Punkte)

d) Betrachten Sie nun den Fall $\mathcal{T} \ll 1$ (Tunnelkontakt). Entwickeln Sie $S(\chi)$ bis in erster Ordnung in $\mathcal{T}$ und führen Sie die ϵ- Integrale aus. Berechnen Sie die Kumulanten C_n für allgemeine $n > 0$. Was ergibt sich für den mittleren Strom $\langle I \rangle = eC_1/\tau$, und den Stromkorrelator $\langle\langle I^2 \rangle\rangle = e^2 C_2/\tau$? Berechnen Sie das Verhältnis des dritten Korrelators ("skewness") $\langle\langle I^3 \rangle\rangle = e^3 C_3/\tau$ zum mittleren Strom. (5 Punkte)

e) Betrachten Sie für den Tunnelkontakt den Fall $T = 0$, $eV > 0$. Berechnen Sie $\Phi(\chi)$ sowie $\rho(N)$ (analog zu c). Zeigen Sie, dass sich eine Poissonsche Zählstatistik ergibt. (3 Punkte)

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Mastergleichung für radioaktiven Zerfall:
Ein Präparat bestehe aus gleichartigen radioaktiven Kernen. λ sei die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Sekunde für einen einzelnen Kern. Für n noch nicht zerfallene Kerne beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls pro Sekunde also $n\lambda$. Man stelle die Mastergleichung für diesen Prozess auf (d.h. für $\rho_n(t)$=Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit t noch n radioaktive Kerne vorhanden sind) und löse sie für die Anfangsbedingung, dass die Zahl der Kerne zur Zeit $t = 0$ gerade n_0 beträgt. [Hinweis: Verwenden Sie $\rho_n = 0$ für $n > n_0$ und lösen Sie die Mastergleichung zuerst für ρ_{n_0}.]