6. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 13.06.2006 in den Übungen

Aufgabe 15 (15 Punkte)

Verlust der Phasenkohärenz ("Dephasing"):

Wir betrachten ein Ensemble von quantenmechanischen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem äußeren Magnetfeld $\vec{H} = H\,\hat{z}$. Der Hamiltonoperator eines Spins ist $\mathcal{H} = -\mu_{\mathrm{B}}\,H\,\sigma_z$. (Hier und im folgenden sind $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die bekannten Paulimatrizen.)

a) Schreiben Sie in der Basis der Eigenzustände $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ von $\mathcal{H}$ den Dichteoperator des Ensembles für folgende Situationen auf:

(a) alle Spins befinden sich in demselben Quantenzustand gegeben durch $a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$,

(b) jeweils die Hälfte der Spins ist im Zustand $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$,

(c) 3/4 der Spins sind im Eigenzustand von σ_x mit Eigenwert $+1$ und 1/4 im Eigenzustand von σ_x mit Eigenwert -1.

(3 Punkte)

b) Finden Sie die Zeitentwicklung für einen allgemeinen Dichteoperator des Spinsystems, indem Sie die quantenmechanische Liouville-Gleichung lösen. Dazu benötigen Sie die Identität

$$e^{\pm i\alpha\sigma_z} = \cos\alpha \pm i\sigma_z\,\sin\alpha \quad . \tag{1}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\sigma_x(t)\rangle = \mathrm{Tr}\,[\rho(t)\sigma_x]$ für ein Spinsystem, das bei $t = 0$ die Hälfte der Spins in $+\hat{z}$–Richtung und die andere Hälfte in $+\hat{y}$–Richtung polarisiert hat. Fällt Ihnen etwas am Wert der Präzessionsfrequenz auf? (6 Punkte)

c) Stellen Sie sich vor, daß durch eine externe Rauschquelle das äußere Magnetfeld einen fluktuierenden Anteil bekommt: $H \to H + \delta H(t)$. Der stochastische Magnetfeldanteil sei Gaußverteilt, d.h. $\langle\langle\delta H(t)\rangle\rangle = 0$ und $\langle\langle\delta H(t)\delta H(t')\rangle\rangle = 2\gamma\delta(t-t')$. (Wir unterscheiden hier den *stochastischen* Mittelwert $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ vom statistischen *Ensemblemittelwert* $\langle\ldots\rangle$!) Verdeutlichen Sie sich durch Einsetzen in die quantenmechanische Liouville-Gleichung, daß die Zeitentwicklung des Dichteoperators gegeben ist durch

$$\rho(t) = e^{i\sigma_z \int_0^t dt'\,[\omega+\delta\omega(t')]}\rho(0)e^{-i\sigma_z \int_0^t dt''\,[\omega+\delta\omega(t'')]} \quad , \tag{2}$$

mit entsprechenden ω und $\delta\omega(t)$. Dieses Ergebnis ist selbst eine stochastische Größe, daher erfolgt die übliche Ensemblemittelung mit dem stochastischem Mittelwert $\tilde{\rho}(t) = \langle\langle\rho(t)\rangle\rangle$ des Dichteoperators. Berechnen Sie $\tilde{\rho}(t)$ für das in **a**) (a) betrachtete Ensemble. Erinnern Sie sich dazu daran, daß wir als Basis die Eigenzustände von σ_z

gewählt haben und in dieser die Exponentialfunktion von σ_z besonders einfach (d.h. diagonal) ist [siehe Gl. (1)]. Weiterhin benötigen Sie die für Gaußverteilte stochastische Variable $X(t)$ geltende Identität

$$\left\langle\left\langle e^{\pm i \int dt \; X(t)} \right\rangle\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left\langle\left\langle \int dt' \; X(t') \int dt'' \; X(t'') \right\rangle\right\rangle} \quad . \tag{3}$$

Wie unterscheiden sich Diagonal- und Außerdiagonalelemente von $\tilde{\rho}(t)$? Was passiert für $t \to \infty$? Wie reflektiert die Form des effektiven Dichteoperators $\tilde{\rho}(t)$ in diesem Grenzfall den durch die äußere Rauschquelle verursachten Verlust der quantenmechanischen Phasenkohärenz in unserem Spinsystem? (6 Punkte)

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Reine und gemischte Zustände:

Wir betrachten ein Stern-Gerlach-Experiment. Aus einer Quelle Q treten Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen aus. Hinter Ihrem Analysemagneten teilt sich der Strahl in zwei Teilstrahlen gleicher Intensität. Sie wollen nun herausfinden, ob aus Ihrer Quelle ein Gemisch von Zuständen oder ein reiner Zustand emittiert wird.

a) Konstruieren Sie einen reinen Zustand sowie ein Gemisch aus reinen Zuständen, die jeweils dieses Ergebnis liefern. Geben Sie jeweils die Dichtematrix an. (2 Punkte)

b) Wie können Sie diese beiden Situationen experimentell ohne weitere Apparaturen unterscheiden? Begründen Sie Ihre Idee mit einer kurzen Rechnung. (2 Punkte)

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Reduzierte Dichtematrix:

Betrachten Sie zwei antiferromagnetisch gekoppelte Spins mit $S = \frac{1}{2}$: $\hat{H} = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$.

a) Das System sei im Grundzustand. Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ auf. Überprüfen Sie explizit, dass es sich bei Ihrem Ergebnis um einen reinen Zustand handelt. (2 Punkte)

b) Nehem Sie jetzt an, dass nur der Spin $\vec{S}_1$ als Messgröße interessiert. Bestimmen Sie die reduzierten Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin "ausspuren": $\rho^{red}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=\uparrow,\downarrow} \rho_{\alpha\gamma,\beta\gamma}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^{red}$ einen gemischten Zustand beschreibt (obwohl $\hat{\rho}$ rein ist). (2 Punkte)