7. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 20.06.2006 in den Übungen

Die erste Klausur findet am Mittwoch, dem 21. Juni von 11:30-13:30 Uhr im Gaede-Hörsaal (Nachnamen beginnend mit A-G) und im Lehmann-Hörsaal (Nachnamen beginnend mit H-Z) statt. Einziges Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes DinA4-Blatt.

Aufgabe 18 (5 Punkte)

Der Gleichverteilungssatz:

Wir wollen den Gleichverteilungssatz in allgemeiner Form herleiten. Dazu bezeichne $(x) = (\vec{q}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ der Vektor irgendwelcher Orts- ($\vec{q}$) oder Impulskoordinaten ($\vec{p}$) und die Funktion $f(x)$ bezeichne irgendeine Observable. Die Hamiltonfunktion des betrachteten Systems sei $H \equiv H(x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\left\langle f(x)\frac{\partial H}{\partial x_i}\right\rangle = k_B T \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\rangle \tag{1}$$

gilt, wobei $\langle \cdots \rangle = \frac{1}{Z}\int \ldots \frac{d^{6N}x}{h^{6N}N!}$ den Mittelwert mit der kanonischen klassischen Verteilung bezeichnet. [Hinweis: verwenden Sie, dass das Integral einer Ableitung über den gesamten Phasenraum verschwindet.] (2 Punkte)

b) Wenden Sie Gleichung (1) auf den Fall, dass $f(x) = x_j$ ist, an. (1 Punkt)

c) Die kinetischen Energie eines Teilchens ist gegeben durch

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Berechnen Sie den kanonischen Mittelwert $\langle E_{kin}\rangle$. (1 Punkt)

d) Was ergibt sich für die mittlere Gesamtenergie $\langle H\rangle$, wenn auch die q-Abhängigkeit von H quadratisch ist? Nehmen Sie dabei an, dass f quadratische Terme pro Teilchen (einschließlich der für die kinetische Energie) in H vorhanden sind. (1 Punkt)

Aufgabe 19 (15 Punkte)

Klassisches Zweizustandssystem, mikrokanonisch:

Wir betrachten ein Ensemble von N unabhängigen, klassischen Spins-$\frac{1}{2}$-Systemen im Magnetfeld, jeder einzelne Spin kann die Energien $\pm\mu_B H$ annehmen.

a) Geben Sie die möglichen Energien des Systems und deren Entartungsgrad als Funktion der Zahl m der nach "oben" zeigenden Spins an. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie für einzelne Spins S_i, S_j die mikrokanonischen Erwartungswerte $\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$, sowohl für $i = j$ als auch für $i \neq j$. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Entropie als thermodynamisches Potential für große N. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis mit der Stirlingschen Formel. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie daraus die Temperatur als Funktion der Energie. Was fällt Ihnen am Wertebereich der Temperatur auf? Welche Erklärung haben Sie für dieses Ergebnis? (2 Punkte)

e) Berechnen Sie die spezifische Wärme C_H und die Magnetisierung M. (4 Punkte)

Aufgabe 20 (8 Punkte+8 Zusatzpunkte)

System von harmonischen Oszillatoren:
Betrachten Sie ein System von N unabhängigen und *unterscheidbaren* 1-dimensionalen harmonischen Oszillatoren, beschrieben durch die folgende Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_i^2 \right).$$

a) Zeigen Sie, dass die klassische mikrokanonische Entropie als Funktion der Energie $E = U$ durch

$$S_{mikro} = k_B \left[N \ln \frac{2\pi E}{\omega N} + N + \ln(2N) \right]$$

gegeben ist. Was ist die Temperatur? [Hinweis: $\ln N! \approx N \ln N - N$]. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie klassisch das kanonische Zustandsintegral, die freie Energie, Entropie, innere Energie und spezifische Wärme C_V als Funktionen der Temperatur. Vergleichen Sie die die Entropie mit der unter a) erhaltenen mikrokanonischen Entropie. (6 Punkte)

c) Zusatzaufgabe: Wiederholen Sie die unter b) durchgeführten Berechnungen für den quantenmechanischen Fall, indem Sie von der kanonischen Zustandssumme ausgehen. Diskutieren Sie die innere Energie und die spezifische Wärme für hohe und tiefe Temperaturen. (8 Zusatzpunkte)

[Hinweis für b) und c): Beachten Sie, dass die kanonische Zustandssumme für unabhängige und unterscheidbare Oszillatoren faktorisiert.]