8. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Präsentation: Dienstag, 27.06.2006 in den Übungen

Die erste Klausur findet am Mittwoch, dem 21. Juni von 11:30-13:30 Uhr im Gaede-Hörsaal (Nachnamen beginnend mit A-G) und im Lehmann-Hörsaal (Nachnamen beginnend mit H-Z) statt. Einziges Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes DinA4-Blatt.

Aufgabe 21 (12 Punkte)

Maxwell-Boltzmann-Verteilung:

Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Gesamtheit, daß für ein klassisches ideales Gas freier Atome der Masse m die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ (d.h. im Volumenelement d^3v um den Endpunkt von $\vec{v}$ im Geschwindigkeitsraum) hat, durch

$$f(\vec{v})\mathrm{d}^3v \quad = \quad \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}}\mathrm{d}^3v$$

gegeben ist (Maxwell-Boltzmann-Verteilung). (4 Punkte)

Berechnen Sie für ein Teilchen (je 1 Punkt)

a) die mittlere Geschwindigkeit $\langle\vec{v}\rangle$,

b) den mittleren Geschwindigkeitsbetrag $\langle|\vec{v}|\rangle$,

c) das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle\vec{v}^2\rangle$,

d) den Mittelwert des inversen Geschwindigkeitsbetrags $\langle 1/|\vec{v}|\rangle$,

e) den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|_\mathrm{w}$.

f) Berechnen Sie den mittleren Betrag der Relativgeschwindigkeit zweier Atome $\langle|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\rangle$.

g) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle$ eines Gasatoms.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(E)\mathrm{d}E$, daß ein Atom eine Energie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ hat (1 Punkt)?

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Barometrische Höhenformel:

Die Hamiltonfunktion von N Teilchen der Masse m unter dem Einfluss des (näherungsweise homogenen) Gravitationsfeldes ist gegeben durch

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} - m\vec{g}\cdot\vec{q}_i\right)$$

mit $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (g ist die Gravitationskonstante) und $\vec{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Gesamtheit, dass die Verteilung der Ortskoordinate eines herausgegriffenen Teilchens der Barometrischen Höhenformel

$$w(\vec{q}) = \mathrm{const.}\cdot e^{\frac{m\vec{g}\cdot\vec{q}}{k_BT}}$$

genügt. Leiten Sie daraus und aus der idealen Gasgleichung eine Beziehung für die Luftdruckabhängigkeit mit der Höhe ab.