

Aufgabe 23

(17 Punkte)

Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen:

In der Vorlesung wurde der idealisierte Fall eines uniformen Bose-Gases betrachtet, bei dem die Bose-Teilchen in einem Kasten vom Volumen V eingeschlossen sind. Hier soll die Bose-Einstein-Kondensation in Atomfallen behandelt werden, die von Eric Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl Wieman im Labor erstmals nachgewiesen wurde, und für die es im Jahre 2001 den Physik-Nobelpreis gab. Im Experiment kühlt man Alkaliatome in magneto-optischen Fallen ab. Letztere erzeugen mit guter Genauigkeit ein im allgemeinen asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x, y, z) = \frac{m}{2} \{ \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \} . \quad (1)$$

Um Bose-Einstein-Kondensation zweifelsfrei nachweisen zu können, war es nötig, die thermodynamischen Eigenschaften eines im Potential $V(x, y, z)$ befindlichen Bose-Gases zu verstehen. Diese unterscheiden sich teilweise drastisch vom uniformen Fall.

- a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Einteilchen-Eigenzustände eines im Potential $V(x, y, z)$ befindlichen Teilchens (also des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) durch

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar \left\{ \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2)$$

gegeben sind. (Dazu verwendet man am einfachsten einen Separationsansatz.)

- b) (2 Punkte) Betrachten Sie den im Falle von Bose-Einstein-Kondensation in einer dreidimensionalen Atomfalle makroskopisch besetzten Zustand. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- bzw. Impulsdarstellung? Wie sieht die entsprechende Dichte- bzw. Geschwindigkeitsverteilung aus? Was ist das typische Volumen V welches das Kondensat in diesem Zustand einnimmt? Vergleichen Sie mit der Situation des uniformen Bose-Gases. Was ist qualitativ anders durch die Existenz des äußeren Potentials?
- c) (4 Punkte) Wir nehmen nun an, daß sich N Bosonen im Potential $V(x, y, z)$ befinden. Zeigen Sie, ausgehend von der bosonischen Besetzungszahlverteilung, daß

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z}} = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} e^{-j\beta \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z}} \quad (3)$$

gilt, mit $\beta = 1/(k_B T)$, der Fugazität $\tilde{z} = \exp\{\beta[\mu - \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)]\}$ und $\tilde{E}_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x, n_y, n_z} - \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$. Hier ist $N_0 = \tilde{z}/(1-\tilde{z})$ die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes mit der niedrigsten Energie. Im Grenzfall hoher Temperatur, d.h. $k_B T \gg \max\{\hbar\omega_x, \hbar\omega_y, \hbar\omega_z\}$, kann man die Summe über angeregte Zustände durch ein Integral ersetzen:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \cdots \rightarrow \int_0^{\infty} dn_x \int_0^{\infty} dn_y \int_0^{\infty} dn_z \cdots . \quad (4)$$

Werten Sie diese aus, um $N - N_0$ als Funktion der Fugazität und der Temperatur zu finden.

Zeigen Sie, daß $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ und finden Sie T_c .

- d) (6 Punkte) Mittels der Zustandsdichte $N(E)$ läßt sich die Zahl von Boseteilchen in angeregten Zuständen allgemein schreiben als

$$N - N_0 = V \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{z}^j \int_0^{\infty} dE N(E) e^{-j\beta E}. \quad (5)$$

Vergleich von Gl. (5) mit Gl. (3) liefert den formalen Ausdruck

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z > 0} \delta(E - \tilde{E}_{n_x, n_y, n_z})$$

für die Zustandsdichte einer dreidimensionalen Atomfalle. Benutzen Sie die Relation $\frac{d}{dE}\Theta(E) = \delta(E)$ sowie die Ersetzung (4), um $N(E)$ für ein harmonisches Potential in $d = 3, 2, 1$ Dimensionen zu bestimmen und berechnen Sie $N - N_0$ durch Einsetzen in Gl. (5). Wiederholen Sie dieses für den Fall eines uniformen Bose-Gases. [Hinweis: Die Zustandsdichte des uniformen Bose-Gases ist gegeben durch $N_u(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \delta(E - \frac{p^2}{2m})$.] Für welche Zahl von Raumdimensionen tritt Bose-Einstein-Kondensation des Bose-Gases in einer Atomfalle bzw. im uniformen Bose-Gas auf? Wie hängt jeweils T_c von der Teilchendichte ab? Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

- e) (4 Punkte) In den experimentell realisierten Bose-Gasen in Atomfallen ist die Teilchenzahl üblicherweise im Bereich von $10^4 \dots 10^6$ und damit so klein, daß erste Korrekturen zum thermodynamischen Limes eine Rolle spielen. Finden Sie die Korrektur zu $N - N_0$, indem Sie Gl. (3) in führender Ordnung im Hochtemperaturlimes auswerten. [Hinweis: Die Summe $\sum_{n_x, n_y, n_z}$ ist das Produkt dreier geometrischer Reihen. Summieren Sie diese nach der bekannten Formel, bevor Sie N_0 abziehen und die Hochtemperaturentwicklung vornehmen.]

Aufgabe 24

(5 Punkte)

Plancksches Strahlungsgesetz:

Die Oberflächentemperatur eines Sternes läßt sich über die Frequenz abschätzen, bei der das Maximum der vom Stern emittierten Strahlungsenergie liegt.

- a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Maximum der spektralen Energiedichte aus dem Planckschen Strahlungsgesetz.
- b) (3 Punkte) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Wellenlängen für bestimmte kosmische Objekte die zugehörigen Temperaturen. Die folgenden Wellenlängen gehören zum Maximum der Frequenzverteilung:
- (i) Grundstrahlung des Weltalls: $\lambda_{\max} = 0.16 \text{ cm}$
 - (ii) Erdoberfläche: $\lambda_{\max} = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$
 - (iii) Sonnenoberfläche: $\lambda_{\max} = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$