10. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Präsentation: Dienstag, 11.07.2006 in den Übungen

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Zweiatomiges Molekül

Ein zweiatomiges Molekül besitzt Translations-, Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgrade. Es soll die spezifische Wärme eines idealen Gases von N derartigen Molekülen berechnet werden. Der Beitrag der Translationsbewegung ist $C_V^{\text{transl}} = 3Nk_\text{B}/2$.

a) (3 Punkte) Die Energieniveaus der Schwingungszustände des Moleküls sind

$$E_n^{\text{osc}} = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Berechnen Sie die Zustandssumme Z_K, die innere Energie U und die spezifische Wärme C_V^{osc} für den Schwingungsfreiheitsgrad. Was ergibt sich für hohe bzw. tiefe Temperaturen?

b) (5 Punkte) Die Rotationsenergieniveaus des Moleküls sind durch

$$E_\ell^{\text{rot}} = \frac{J^2}{2I}, \qquad J^2 = \hbar^2\ell(\ell+1), \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

mit dem Trägheitsmoment I gegeben. Geben Sie die Zustandssumme Z_K für den Rotationsanteil an. Beachten Sie die Entartung der Drehimpulszustände ℓ. Für hohe Temperaturen kann die Näherungsformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \approx \int_0^\infty \mathrm{d}x f(x) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0)$$

(Euler-MacLaurin) verwendet werden. Für tiefe Temperaturen werden nur die ersten beiden Terme der Summe ausgewertet. Berechnen Sie den Rotationsanteil der spezifischen Wärme C_V^{rot} in den beiden Grenzfällen.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie qualitativ, daß $E^{\text{rot}} \ll E^{\text{osc}}$, und skizzieren Sie detailliert die spezifische Wärme $C_V = C_V^{\text{transl}} + C_V^{\text{osc}} + C_V^{\text{rot}}$ eines derartigen Gases als Funktion der Temperatur.

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Zustandsdichte

Betrachten Sie freie Teilchen mit Dispersion $\epsilon_{\vec{p}} = \vec{p}^2/2m$. Die Summe $\sum_{\vec{p}}$ über eine Funktion $F(\epsilon_{\vec{p}})$ kann geschrieben werden als

$$\sum_{\vec{p}} F(\epsilon_{\vec{p}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) F(\epsilon),$$

wobei

$$D(\epsilon) = \sum_{\vec{p}} \delta(\epsilon - \epsilon_{\vec{p}})$$

die Zustandsdichte bezeichnet. Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ für freie Teilchen in ein, zwei und drei Raumdimensionen. Ersetzen Sie dazu die Summe über die Impulse durch ein Impulsintegral, so wie Sie es aus der Vorlesung gewohnt sind. Skizzieren Sie $D(\epsilon)$ für diese drei Fälle.

Aufgabe 27 (5 Punkte)

Chemisches Potential für zweidimensionales Elektronengas

Bestimmen Sie für ein zweidimensionales Elektronengas (Teilchenzahl N, Fläche A) das chemische Potential μ als Funktion der Temperatur T und der Fermienergie ϵ_F. [Hinweis: Das Integral $\int_a^b \mathrm{d}x \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)}$ kann mit Hilfe der Substitution $e^x = t$ berechnet werden.] Betrachten Sie die Grenzfälle $k_\mathrm{B}T \ll \epsilon_F$ und $k_\mathrm{B}T \gg \epsilon_F$. Für welche Temperatur wird $\mu = 0$? Skizzieren Sie $\mu(T)$.