11. Übung zu Theorie F: Statistische Physik
Universität Karlsruhe SS 2006

Prof. Dr. Gerd Schön— Priv.Doz. Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Präsentation: Dienstag, 18.07.2006 in den Übungen

Aufgabe 28 (12 Punkte)

Statistische Behandlung des Paramagnetismus:

a) Klassischer Fall: (5 Punkte) Betracheten Sie N magnetische Dipole mit Dipolmomenten $\vec{\mu}_i$ $(i = 1, \dots, N)$, wobei der Betrag des Moments für alle Dipole gleich sei: $|\vec{\mu}_i| = \mu$. Ihre Energie in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ ist durch $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$ mit $E_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$ gegeben. Berechnen Sie die Zustandssumme und daraus das mittlere magnetische Moment $\langle \vec{\mu}_i \rangle$. Drücken Sie das Ergebnis durch die Langevinfunktion

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

aus. Skizzieren Sie $L(x)$. Berechnen Sie den Hochtemperaturlimes ($k_B T \gg \mu|\vec{B}|$) der Suszeptibilität χ, welche die Magnetisierung $\vec{M}$ mit dem angelegten Magnetfeld $\vec{B}$ verknüpft: $\vec{M} = \chi \vec{B}$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall das Curiegesetz des Paramagnetismus $\chi = C/T$ gilt, und bestimmen Sie die Curiekonstante C.

b) Quantenmechanische Behandlung: (5 Punkte) Die N magnetischen Dipole sollen nun quantenmechanisch behandelt werden. Ihr magnetisches Moment sei durch

$$\mu^2 = g^2 \mu_B^2 J(J+1)$$

gegeben (wobei g der Landefaktor ist, und μ_B das Bohrsche Magneton). J ist die Drehimpulsquantenzahl. Die Quantisierungsachse sei in Richtung des äußeren Magnetfeldes (z-Achse) gewählt. Die möglichen Werte μ_z für gegebenes J sind dann

$$\mu_z = g\mu_B m \qquad \text{mit} \qquad m = -J, -J+1, \dots, J-1, J\ .$$

Berechnen Sie für diesen Fall die Zustandssumme und das mittlere magnetische Moment. Das Ergebnis kann durch die Brillouinfunktion

$$B_J(x) = \left(1 + \frac{1}{2J}\right) \coth\left\{\left(1 + \frac{1}{2J}\right) x\right\} - \frac{1}{2J} \coth\left\{\frac{1}{2J} x\right\}$$

ausgedrückt werden. Wann gilt hier das Curiegesetz? Bestimmen Sie für diesen Fall die Curiekonstante C.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie nun den Grenzfall $J \to \infty$ und gleichzeitig $g \to 0$, so daß der Wert für $g \cdot J$ konstant bleibt. Zeigen Sie, daß dann $B_J(x) \to L(x)$. Was bedeutet das physikalisch?

d) (1 Punkt) Betrachten Sie den Spezialfall $J = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie dafür das mittlere magnetische Moment.

Aufgabe 29 (5 Punkte)

Fluktuations-Dissipations-Relation im Ising-Modell:

Benutzen Sie den allgemeinen Ausdruck $Z = \mathrm{Sp}\left\{e^{-H/(kT)}\right\}$ für die Zustandssumme des durch den Hamiltonoperator $H = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_{iz}S_{jz} - \gamma B\sum_i S_{iz}$ beschriebenen Ising-Modells, um die Relation

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\gamma^2}{kT}\left[\sum_{i,j}\langle S_{iz}S_{jz}\rangle - \left\langle \sum_i S_{iz}\right\rangle^2\right]$$

abzuleiten.

Aufgabe 30 (9 Punkte)

Spin-Spin-Korrelationsfunktion im Ising-Modell:

Wir betrachen ein eindimensionales Ising-Modell ohne Magnetfeld mit $H = -J\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, wobei $\sigma_i = \pm 1$. Wir wollen die Korrelationsfunktion $G(r) = \langle\sigma_k\sigma_{k+r}\rangle$ berechnen. Es erweist sich als günstig, dazu zunächst ein etwas allgemeineres Modell mit Wechselwirkungen J_i zwischen Spin i und $i+1$ zu betrachten: $\tilde{H} = -\sum_i J_i\sigma_i\sigma_{i+1}$.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass man $G(r=1)$ erhalten kann aus

$$\langle\sigma_k\sigma_{k+1}\rangle = \frac{1}{Z_N}\frac{1}{\beta}\frac{\partial Z_N(J_1, J_2, \cdots, J_{N-1})}{\partial J_k}\Big|_{J_1=J_2=\cdots=J_{N-1}=J} \tag{1}$$

und berechnen Sie $G(1)$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $G(r=2)$

$$\langle\sigma_k\sigma_{k+2}\rangle = \frac{1}{Z_N}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 Z_N(J_1, J_2, \cdots, J_{N-1})}{\partial J_k \partial J_{k+1}}\Big|_{J_1=J_2=\cdots=J_{N-1}=J} \tag{2}$$

gilt und berechnen Sie $G(2)$. [Hinweis: Benutzen Sie dazu $\sigma_{k+1}^2 = 1$, und damit $\sigma_k\sigma_{k+2} = \sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}$.]

c) (4 Punkte) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse aus a) und b) für beliebige r, und zeigen Sie, dass $G(r) = (\tanh\beta J)^r$ gilt. Skizzieren Sie $G(r)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.