

## Übungsblatt Nr. 3 zur Theorie F (Statistische Physik)

- 1 Paramagnetismus lokalisierter Spins:** In einem Kristallgitter sind  $N$  Atome fixiert, die je eine nicht-abgeschlossene Schale mit Gesamtdrehimpuls (Spin)  $J$  aufweisen. In einem äußeren Magnetfeld  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ , das in Einheiten der Energie gemessen wird, besitzt das Atom  $i$  also die Energie-Eigenwerte:  $\varepsilon_i = -m_i B$ ,  $m_i = -J, (-J+1), \dots, (J-1), J$ .

a) Geben Sie die Mikrozustände  $\{\alpha\}$  und die zugehörigen Energien  $E_\alpha$  an. Zeigen Sie, daß die kanonische Zustandssumme faktorisiert,  $Z = (Z_1)^N$ , und berechnen Sie  $Z_1$ .

(Hinweis:  $1 + x + x^2 + \dots + x^p = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x}$ )

b) Die Magnetisierung ist definiert durch  $M(T, B, N) = \langle m_1 + m_2 + \dots + m_N \rangle$ . Zeigen Sie, daß  $M = N \langle m_1 \rangle$ , und berechnen Sie  $\langle m_1 \rangle$  als Funktion von  $B/kT$ .

c) Bestimmen Sie Näherungsausdrücke für  $M$ , für kleines Magnetfeld  $B/kT \ll 1$  und großes Magnetfeld  $B/kT \gg 1$ .

Berechnen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität  $\chi(T, N) = \lim_{B \rightarrow 0} \left( \frac{\partial M}{\partial B} \right)_T$ .

- 2 Klassischer Grenzfall:** Betrachtet man das Problem aus Aufg. 1 klassisch, so sind die Spins als Vektoren  $\mathbf{J}$  mit fester Länge  $|\mathbf{J}| = J$  darzustellen. Die Orientierung von  $\mathbf{J}$  im Raum ist durch die Raumwinkel gegeben:  $\mathbf{J} = (J^x(\Omega), J^y(\Omega), J^z(\Omega))$ ,  $\Omega = (\vartheta, \varphi)$ ,  $d\Omega = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$ .

Die klassische Zustandssumme lautet damit  $Z^{kl} = \int d\Omega_1 \dots \int d\Omega_N \exp \left( \frac{B}{kT} \sum_{i=1}^N J^z(\Omega_i) \right)$ .

a) Man zeige, daß  $Z^{kl} = (Z_1^{kl})^N$  und berechne  $Z_1^{kl}$ . Zeigen Sie auch, daß die Magnetisierung  $M^{kl} = \langle J^z(\Omega_1) + \dots + J^z(\Omega_N) \rangle$  gegeben ist durch  $M^{kl} = N \langle J^z(\Omega_1) \rangle$ , und berechnen Sie  $\langle J^z(\Omega_1) \rangle$ .

b) Wie läßt sich in  $M$  aus Aufg. 1 ein Grenzwert  $J \rightarrow \infty$  durchführen, ohne daß dabei die physikalischen Größen  $M$  und innere Energie  $U$  unbeschränkt anwachsen? Vergleichen Sie das entsprechende Ergebnis  $\lim_{J \rightarrow \infty} M$  mit  $M^{kl}$ .

- 3 Zustandsdichte eines freien Teilchens:** In einem Würfel der Kantenlänge  $L$  mit Volumen  $V = L^d$  in  $d \in \{1, 2, 3\}$  Raumdimensionen befindet sich ein freies Punktteilchen.

a) Geben Sie die quantenmechanischen Eigenzustände  $\psi(\mathbf{r})$  des Teilchens in Ortsdarstellung, sowie die Eigenenergien (Dispersion)  $\varepsilon(\mathbf{k})$  an. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt:  $\psi(\mathbf{r} + L \mathbf{e}_\mu) = \psi(\mathbf{r})$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, d$ . Man zeige, daß daraus folgt:  $k_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu$ ,  $n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, d$ .

Zeigen Sie damit, daß im thermodynamischen Limes ( $V \rightarrow \infty$ ) für eine beliebige Funktion  $F(\mathbf{k})$  gilt:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_d} F(k_1, k_2, \dots, k_d) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_d}{2\pi} F(k_1, \dots, k_d).$$

b) Berechnen Sie nun die Zustandsdichte  $\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$  des freien Teilchens für  $d = 1, 2, 3$ . (Hinweis: Polarkoordinaten, Kugelkoord.)