UNIVERSITÄT KARLSRUHE — SS 2007
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann — **16.05.07**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre — theorie-f@tkm.uni-karlsruhe.de

# Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie F (Statistische Physik)

$\boxed{1}$ **Ideales Boltzmann-Gas:** Ein Gas aus $N$ freien Punktteilchen der Masse $m$ befindet sich im Volumen $V = L^3$. Die Teilchen sollen quantenmechanisch, aber als unterscheidbar behandelt werden, wobei periodische Randbedingungen an die Eigenzustände eines Teilchens gestellt werden.

**a)** Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ der kanonischen Gesamtheit mit Temperatur $T$ an, und berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T, V, N)$ im thermodynamischen Limes.

**b)** Bestimmen Sie aus der Wahrscheinlichkeit $\rho(\mathbf{p})\,\mathrm{d}^3p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle\, \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}_i(\alpha)}\,\rangle$, ein Teilchen im Impulsraumelement $\mathrm{d}^3p$ zu finden, die Geschwindigkeitsverteilung $\rho(\mathbf{p})$. $\mathbf{p}_i(\alpha)$ ist der Impuls des Teilchens Nr. $i$ im Mikrozustand $\alpha$.

$\boxed{2}$ **Ideales Gas aus zweiatomigen Molekülen:** Ein ideales Gas aus $N$ Molekülen befindet sich in einem Volumen $V$ (in drei Raumdimensionen). Jedes Molekül besitzt Schwingungs-, Rotations- und Translationsfreiheitsgrade. Das Gas ist an ein Wärmebad der Temperatur $T$ angekoppelt (kanonische Gesamtheit).

**a)** Man betrachte im Folgenden ausschließlich die *Schwingungs*freiheitsgrade des Gases: Die Energie eines Moleküls ist dann gegeben durch
$E_n^{osz} = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
Wodurch sind die Mikrozustände $\{\alpha\}$ der Schwingungsbewegung des Gases festgelegt?
Berechnen Sie die zugehörige kanonische Zustandssumme $Z^{osz}$, die innere Energie $U^{osz}$ und daraus die spezifische Wärme $c_V^{osz} = \left(\frac{\partial U^{osz}}{\partial T}\right)_{V,N}$.
Bestimmen Sie asymptotische Ausdrücke von $c_V^{osz}$ für $T \to 0$ und $T \to \infty$.

**b)** Nun seien ausschließlich die *Rotations*freiheitsgrade zugelassen. Die Energie eines Moleküls ist jetzt durch seinen Bahndrehimpuls $\mathbf{L}^2 = l(l+1)$ gegeben,
$E_l^{rot} = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)\ , \quad l = 0, 1, 2, \ldots \quad (I = const. =$ Trägheitsmoment).
Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ für diesen Fall an (Entartung!).
Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme $Z^{rot}$ näherungsweise für kleine Temperaturen $kT \ll \frac{\hbar^2}{2I}$, und daraus $U^{rot}$ und $c_V^{rot}$.

Bestimmen Sie nun $Z^{rot}$ und daraus $c_V^{rot}$ im Limes $T \to \infty$.

**c)** Jetzt sei ausschließlich die *Translations*bewegung möglich. Geben Sie $U^{trans}$ und $c_V^{trans}$ an. Schließlich seien *alle* Freiheitsgrade des Gases zugelassen. Begründen Sie, daß gilt: $c_V = c_V^{osz} + c_V^{rot} + c_V^{trans}$.

$\boxed{3}$ **Ideales Fermi-Gas:** Wir betrachten $N$ freie fermionische Punktteilchen der Masse $m$, die auch einen Spin 1/2 besitzen. Diese befinden sich in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Es sei $T = 0$.

Berechnen Sie die Fermi-Energie $\varepsilon_F(V, N)$ auf zwei Wegen: (i) über die Zustandsdiche $\mathcal{N}(\varepsilon)$ (siehe Aufg. 3 b) von Blatt 3), (ii) über das Volumen der Fermi-Kugel.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 22.05.07 —