UNIVERSITÄT KARLSRUHE SS 2007
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **13.06.07**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-f@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 8 zur Theorie F (Statistische Physik)

$\boxed{1}$ **Boltzmann-Gleichung in Relaxationszeitnäherung:** In einem Metall (Volumen V) befinden sich N nicht-wechselwirkende Elektronen (Masse m, Ladung $-e$, Spin 1/2) mit Dispersion $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$. Im Gleichgewicht (großkanonische Gesamtheit mit T, μ) lautet die Boltzmannsche Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p},\mathbf{r})|_{Gl.} = f^0 = [\,e^{(\varepsilon(\mathbf{p})-\mu)/kT} + 1\,]^{-1}$. Wird das Gleichgewicht durch ein zeitunabhängiges elektrisches Feld $\mathbf{E}$, einen Gradienten ∇T oder $\nabla\mu$ gestört, so ist $f(\mathbf{p},\mathbf{r})$ bestimmt durch die Boltzmann-Gleichung

$$\Big[\,\frac{\mathbf{p}}{m}\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{p},\mathbf{r}) - e\mathbf{E}\,\nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p},\mathbf{r})\,\Big] = I \quad , \quad I = -\frac{1}{\tau}[\,f(\mathbf{p},\mathbf{r}) - f^0\,] \,.$$

$1/\tau$ ist die Streurate der Elektronen durch Störstellen im Metall.
Im Folgenden betrachten wir die Teilchendichte $n(\mathbf{r})$, elektrische Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und die Wärmestromdichte $\mathbf{j}_Q(\mathbf{r})$,

$$n = 2\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p},\mathbf{r}) \,, \quad \mathbf{j} = -2e\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{p},\mathbf{r}) \,, \quad \mathbf{j}_Q = 2\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\mathbf{p}}{m}[\,\varepsilon(\mathbf{p})-\mu\,] f(\mathbf{p},\mathbf{r})$$

a) Zeigen Sie, daß im Gleichgewicht gilt: $\mathbf{j}^0(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{j}^0_Q(\mathbf{r}) = 0$, $n^0(\mathbf{r}) = N/V$.

b) In Gegenwart äußerer Felder ist nun $f(\mathbf{p},\mathbf{r}) = f(\mathbf{p},T(\mathbf{r}),\mu(\mathbf{r}))$.
Bestätigen Sie, daß in *linearer Ordnung* $\sim \mathbf{E}$, $\sim \nabla T$, $\sim \nabla\mu$ gilt:

$$f(\mathbf{p},\mathbf{r}) = f^0 + \frac{\mathbf{p}}{m}\Big[\,-e\mathbf{E} - \nabla\mu - \frac{\varepsilon(\mathbf{p})-\mu}{T}\nabla T\,\Big]\,\tau\,\left(-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{p})}$$

c) Die elektrische Leitfähigkeit σ ist definiert über $j = \sigma E$ für $\nabla T = \nabla\mu = 0$. Wir betrachten $\mathbf{j},\mathbf{E}||\mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j mit Hilfe von **b)**, und zeigen Sie, daß für $T \to 0$ gilt: $\sigma = n^0 e^2\tau/m$ (Drude-Leitfähigkeit).

d) Die thermische Leitfähigkeit K folgt aus $j_Q = -K\,\nabla T$ für $\mathbf{E} = \nabla\mu = 0$. Es sei $\mathbf{j}_Q,\nabla T||\mathbf{e}_z$. Berechnen Sie j_Q in führender Ordnung T, und zeigen Sie, daß $K = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2\sigma\,T$ (Wiedemann–Franz-Gesetz). *Hinweis:* $\int \mathrm{d}\varepsilon\, A(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\right) = A(\mu) + A''(\mu)\frac{\pi^2}{6}(kT)^2$, $\mu(T) = \varepsilon_F + (\sim T^2)$, Zustandsdichte.

$\boxed{2}$ **Ising-Modell:** Das Ising-Modell zweier wechselwirkender Spins 1/2 auf Gitterplätzen 1 und 2 in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$ lautet (in geeigneten Einheiten)
$\hat{H} = -J\hat{S}^z_1\hat{S}^z_2 - B(\hat{S}^z_1 + \hat{S}^z_2)$

a) Bestimmen Sie die Eigenzustände und -energien von $\hat{H}$, und damit die kanonische Zustandssumme $Z_K(T,B)$.

b) Berechnen Sie die Magnetisierung $M(T,B) = \langle \hat{S}^z_1 + \hat{S}^z_2\rangle$ und die Suszeptibilität $\chi(T) = \lim\limits_{B\to 0}\frac{\partial M}{\partial B}$. Wie verläuft $\chi(T)$ für $kT \ll J$ bzw. $kT \gg J$?

c) Alternative Methode zur Berechnung der Suszeptibilität:
Zeigen Sie zunächst, daß gilt: $\chi(T) = \frac{1}{kT}\,\langle(\hat{S}^z_1 + \hat{S}^z_2)^{\mathbf{2}}\,\rangle\Big|_{B=0}$.
Berechnen Sie für $B = 0$ den Erwartungswert $\langle(\ldots)^2\,\rangle$ und damit $\chi(T)$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Dienstag, 19.06.07 —