

## Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie F (Statistische Physik)

- 1 Ising-Modell mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung:** Wir betrachten das Ising-Modell für  $N$  wechselwirkende Spins  $1/2$  mit  $\hat{S}_z|\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma|\sigma\rangle$ ,  $\sigma = +1, -1$ . Die Spins sind auf einem quadratischen Gitter angeordnet, jeder Gitterplatz hat  $z$  nächste Nachbarn. In einem Mikrozustand  $\alpha = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N)$  sind Energie  $E_\alpha$  und Magnetisierungsdichte  $m_\alpha$  gegeben durch

$$E_\alpha = -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=(n.N.i)} \sigma_i \sigma_j, \quad m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (n.N.i) \equiv \text{nächster Nachbar von } i$$

$J > 0$  bezeichnet die Wechselwirkungskonstante.

- a) *Näherung von Bragg und Williams (1934):* Setzen Sie  $\sigma_l = (m_\alpha + \Delta\sigma_l)$ ,  $\Delta\sigma_l := (\sigma_l - m_\alpha)$ ,  $l = \text{beliebiger Gitterplatz, in } E_\alpha \text{ ein}$ , und zeigen Sie, daß  $E_\alpha = -N \frac{J}{2} z m_\alpha^2$ , falls man alle Fluktuationsterme  $\sim \Delta\sigma_i \Delta\sigma_j$  vernachlässigt.
- b) Bestimmen Sie die Entropie  $S(E, m, N) = k \ln(\Omega)$  des *mikrokanonischen* Ensembles für fest gewählte  $E, m, N$  in der Näherung aus a). *Hinweis:*  $m = M/N$ ,  $M = (N_+ - N_-)$ ,  $N = (N_+ + N_-)$ , Stirling, z.B.:  $\ln(N_+!) \simeq N_+ \ln(N_+) + N_+$ .
- c) Bestimmen Sie die freie Energie  $F(T, m, N)$ , und daraus eine Gleichung für die Magnetisierung  $m = m(T, N)$  im thermodynamischen Gleichgewicht. Zeigen Sie, daß unterhalb einer Temperatur  $T_c$  eine *spontane Magnetisierung* existiert,  $T < T_c : m \neq 0$ , und bestimmen Sie  $T_c$ .

*Hinweis:*  $F(T, m, N) = N \left[ -\frac{J}{2} z m^2 + kT \frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + kT \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \right]$ .

- 2 Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung:** Nimmt man an, daß die Wechselwirkung  $J$  jeden Spin mit jedem anderen auf dem Gitter verbindet, so lauten Energie und Magnetisierungsdichte im Mikrozustand  $\alpha = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ :

$$E_\alpha = -\frac{J}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

$h$  ist ein äußeres Magnetfeld.

- a) Betrachten Sie die Zustandssumme  $Z_K(T, h, N)$  der *kanonischen* Gesamtheit, und zeigen Sie: Für das Schwankungsquadrat  $\langle (\Delta m)^2 \rangle$  mit  $\Delta m_\alpha = (m_\alpha - \langle m \rangle)$  folgt  $\langle (\Delta m)^2 \rangle \propto \frac{1}{N}$ , und daher kann für  $N \rightarrow \infty$  die Energie geschrieben werden als

$$E_\alpha = -\tilde{h} \sum_{i=1}^N \sigma_i + \tilde{E}_0$$

Wie lauten das effektive Magnetfeld  $\tilde{h}$  und die Konstante  $\tilde{E}_0$ ?

- b) Gewinnen Sie nun eine Gleichung für  $\langle m \rangle(T, N)$  aus der kanonischen Zustandssumme, und zeigen Sie, daß für  $T < T'_c$  eine spontane Magnetisierung existiert. Bestimmen Sie die Übergangstemperatur  $T'_c$ .