Übungen zur Theoretischen Physik F SS 08

PROF. DR. P. WÖLFLE

DR. M. GREITER

Blatt 3

Besprechung 06.05.08

---

1. Paramagnetismus lokalisierter Spins (4 Punkte)

In einem Kristallgitter sind N Atome fixiert, die je eine nicht-abgeschlossene Schale mit Gesamtdrehimpuls (Spin) J aufweisen. In einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$, das in Einheiten der Energie gemessen wird, besitzt das Atom i also die Energie-Eigenwerte:

$$\varepsilon_i = -m_i\,B, \quad m_i = -J, (-J+1), \ldots, (J-1), J$$

(a) Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ und die zugehörigen Energien E_α an. Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme faktorisiert, $Z = (Z_1)^N$, und berechnen Sie Z_1. (1 Punkt)

Hinweis: $1 + x + x^2 + \ldots + x^p = \dfrac{1 - x^{(p+1)}}{1 - x}$

(b) Die Magnetisierung ist definiert durch

$$M(T, B, N) = \langle m_1 + m_2 + \ldots + m_N \rangle$$

Zeigen Sie, dass $M = N\langle m_1 \rangle$, und berechnen Sie $\langle m_1 \rangle$ als Funktion von B/kT. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie Näherungsausdrücke für M für kleine Magnetfelder $B/kT \ll 1$ und große Magnetfelder $B/kT \gg 1$, und berechnen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität

$$\chi(T, N) = \lim_{B \to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T .$$

(1 Punkt)

2. Klassischer Grenzfall (4 Punkte)

Betrachtet man das Problem aus Aufgabe 1 klassisch, so sind die Spins als Vektoren $\mathbf{J}$ mit fester Länge $|\mathbf{J}| = J$ darzustellen. Die Orientierung von $\mathbf{J}$ im Raum ist durch die Raumwinkel gegeben:

$$\mathbf{J} = (J^x(\Omega), J^y(\Omega), J^z(\Omega)), \quad \Omega = (\vartheta, \varphi), \quad \mathrm{d}\Omega = \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Die klassische Zustandssumme lautet damit

$$Z^{kl} = \int \mathrm{d}\Omega_1 \ldots \int \mathrm{d}\Omega_N \, \exp\Big(\frac{B}{kT} \sum_{i=1}^{N} J^z(\Omega_i) \Big).$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z^{kl} = (Z_1^{kl})^N$ und berechne Z_1^{kl}. Zeigen Sie auch, dass die Magnetisierung $M^{kl} = \langle J^z(\Omega_1) + \ldots + J^z(\Omega_N)\rangle$ gegeben ist durch $M^{kl} = N\langle J^z(\Omega_1)\rangle$, und berechnen Sie $\langle J^z(\Omega_1)\rangle$.

(b) Wie läßt sich in M aus Aufgabe 1 ein Grenzwert $J \to \infty$ durchführen, ohne dass dabei die physikalischen Größen M und innere Energie U unbeschränkt anwachsen? Vergleichen Sie das entsprechende Ergebnis $\lim\limits_{J\to\infty} M$ mit M^{kl}.

(je 2 Punkte)

3. Zustandsdichte eines freien Teilchens (2 Punkte)

In einem Würfel der Kantenlänge L mit Volumen $V = L^d$ in $d \in \{1, 2, 3\}$ Raumdimensionen befindet sich ein freies Punktteilchen.

(a) Geben Sie die quantenmechanischen Eigenzustände $\psi(\mathbf{r})$ des Teilchens in Ortsdarstellung, sowie die Eigenenergien (Dispersion) $\varepsilon(\mathbf{k})$ an. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt:

$$\psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_\mu) = \psi(\mathbf{r}), \quad \mu = 1, 2, \ldots, d$$

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$k_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu, \quad n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \quad \mu = 1, 2, \ldots, d$$

Zeigen Sie damit, dass im thermodynamischen Limes ($V \to \infty$) für eine beliebige Funktion $F(\mathbf{k})$ gilt:

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{V}\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_d} F(k_1, k_2, \ldots, k_d) \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_d}{2\pi} F(k_1, \ldots, k_d)$$

(b) Berechnen Sie nun die Zustandsdichte

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

des freien Teilchens für $d = 1, 2, 3$.

Hinweis: Verwenden Sie Polar- und Kugelkoordinaten.

(je 1 Punkt)